

Vybrané problémy z teorie elektromagnetického pole 2009/2010

Petr Dub
Jiří Petráček



Ústav fyzikálního inženýrství
FSI VUT v Brně

Obsah

1	Přehled základních vztahů	2
1.1	Označení důležitých veličin	2
1.2	Maxwellovy rovnice	2
1.3	Podmínky na rozhraní dvou různých prostředí	2
2	Elektrostatické pole	4
2.1	Základní vztahy	4
2.2	Metoda nábojového zobrazení	5
2.3	Ortogonální funkce	7
2.4	Řešení Laplaceovy rovnice v kartézských souřadnicích	8
2.5	Řešení Laplaceovy rovnice v cylindrických souřadnicích	13
2.6	Řešení Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích	26
3	Magnetostatické a kvazistacionární em pole	34
3.1	Magnetostatické pole	34
3.2	Kvazistacionární elektromagnetické pole, skinový jev	38
4	Elektromagnetické vlny	44
4.1	Elektromagnetické vlny ve vakuu	44
4.2	Elektromagnetické vlny v látkovém prostředí	46
4.3	Vlnovody a rezonátory	47
A	Diferenciální operace	56
B	Besselovy funkce	58

Řešení úloh, které jsou označeny rámečkem, představuje základní minimum nutné k porozumění látce a k řešení dalších úloh.

Kapitola 1

Přehled základních vztahů

1.1 Označení důležitých veličin

$\vec{E}$	intenzita elektrického pole
$\vec{H}$	intenzita magnetického pole
$\vec{D}$	elektrická indukce
$\vec{B}$	magnetická indukce
ρ	hustota náboje
σ	plošná hustota nábojů
$\vec{J}$	proudová hustota
$\vec{K}$	hustota plošného proudu
ε	permitivita prostředí
μ	permeabilita prostředí

1.2 Maxwellovy rovnice

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{všechny náboje}) \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{volné náboje}) \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{všechny proudy}) \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad (\text{volné proudy}) \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

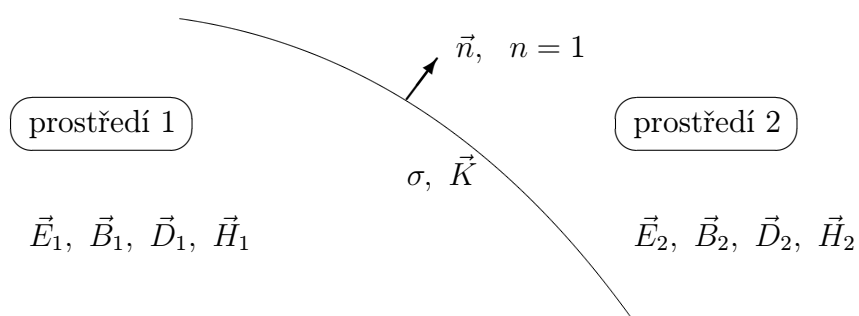
1.3 Podmínky na rozhraní dvou různých prostředí

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma \quad (\text{volné náboje}) \quad (1.5)$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.6)$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (1.7)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \quad (\text{volné proudy}) \quad (1.8)$$



Obrázek 1.1: Označení veličin na rozhraní.

Kapitola 2

Elektrostatické pole

2.1 Základní vztahy

Úloha 2.1 Formulujte základní rovnice popisující elektrostatické pole.

Řešení: Gaussův zákon

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.1)$$

Pole je nevírové, tj.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (2.2)$$

a proto můžeme definovat potenciál elektrického pole vztahem

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi. \quad (2.3)$$

Dosadíme-li (2.3) do (2.1), dostaneme *Poissonovu rovnici*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

kterou obvykle zapisujeme pomocí Laplaceova operátoru $\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ ve tvaru

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.4)$$

Hledáme-li řešení Poissonovy rovnice v určité oblasti Ω , musíme stanovit okrajové podmínky pro Φ na její hranici $\partial\Omega$.

Řešení Poissonovy rovnice, pokud $\rho(r)$ jde k nule dostatečně rychle pro $r \rightarrow \infty$, lze vyjádřit takto

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'. \quad (2.5)$$

Toto řešení odpovídá okrajové podmínce $\Phi \rightarrow 0$ pro $r \rightarrow \infty$.

V oblasti, kde $\rho = 0$, přejde Poissonova rovnice v *Laplaceovu rovnici*

$$\Delta\Phi = 0. \quad (2.6)$$

Hledáme-li její řešení v určité oblasti Ω , musíme stanovit okrajové podmínky pro Φ na její hranici $\partial\Omega$. O řešení Laplaceovy rovnice platí řada vět. Připomeňme důležitou větu, že řešení Laplaceovy rovnice v ohraničené oblasti nabývá maxima a minima na hranici této oblasti.

V elektrostatiice vyjadřujeme okrajové podmínky obvykle pomocí potenciálu. Z rovnice (1.7) plyne

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} \right|_1 = \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} \right|_2,$$

což je ekvivalentní podmínce, že je potenciál je všude spojitý, tj.

$$\Phi|_1 = \Phi|_2. \quad (2.7)$$

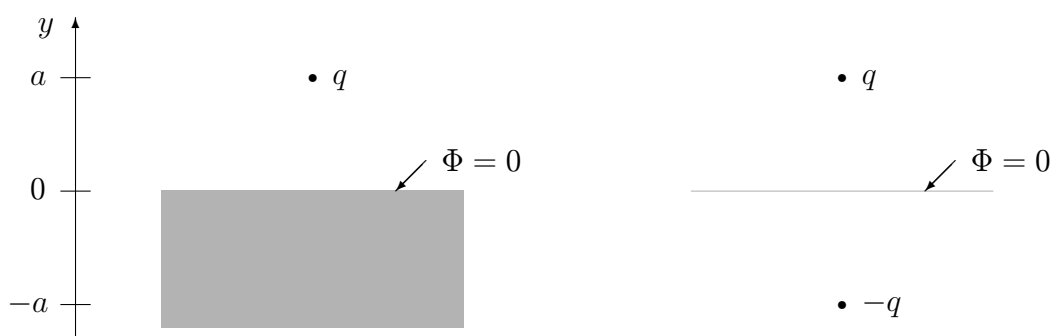
Z rovnice (1.5) plyne

$$-\varepsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_2 + \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_1 = \sigma. \quad (2.8)$$

$\partial/\partial\tau$ značí derivaci ve směru libovolného tečného vektoru a $\partial/\partial n$ značí derivaci ve směru normály k rozhraní.

2.2 Metoda nábojového zobrazení

Úloha 2.2 Kladný bodový náboj q je umístěn ve vzdálenosti a od rovinného povrchu uzemněného vodiče podle obr. 2.1 vlevo. (a) Proveďte kvalitativní rozbor. Určete (b) potenciál a intenzitu elektrického pole, (c) plošnou hustotu náboje na povrchu vodiče, (d) celkový náboj na povrchu vodiče, (e) elektrickou sílu, kterou působí vodič na náboj q .



Obrázek 2.1: Vlevo: Bodový náboj q je umístěn ve vakuu v bodě $[0, a, 0]$, uzemněný vodič zabírá poloprostor $y < 0$. Vpravo: Dva bodové náboje q a $-q$ jsou umístěny ve vakuu v bodech $[0, a, 0]$ a $[0, -a, 0]$. Obě zadání vedou ke stejnému rozložení elektrického pole v oblasti $y \geq 0$.

Řešení: (a) Připomeňte si pole bodového náboje (vztahy pro $\vec{E}$ a Φ , znázornění pomocí siločar a ekvipotenciálních ploch). Jak se změní toto pole v přítomnosti vodiče? Načrtněte siločáry a ekvipotenciální plochy podle následujících úvah.

Elektrické pole kladného bodového náboje způsobí vznik záporných nábojů na povrchu vodiče, a tedy siločáry vycházející z kladného náboje q budou vstupovat do vodiče. Celkové pole bude součtem dvou polí: pole vytvořeného nábojem q a pole vytvořeného náboji na povrchu vodiče. V oblasti blízko náboje q je pole od nábojů na povrchu vodiče zanedbatelné, a tedy původní pole se téměř nezmění. Protože uvnitř uzemněného vodiče je $\Phi = 0$ a protože potenciál je všude spojitý (tj. i na rozhraní mezi kovem a vakuem), budou v blízkosti povrchu vodiče ekvipotenciální plochy přibližně rovnoběžné s povrchem a siločáry kolmé na povrch.

Jaké jsou okrajové podmínky úlohy? Na povrchu vodiče musí platit

$$\Phi|_{y=0} = 0.$$

Pro určení podmínek v ∞ si uvědomíme, že pole náboje q klesá k nule. Totéž musí platit pro pole nábojů na povrchu vodiče (plošná hustota těchto nábojů bude zřejmě klesat k nule s

rostoucí vzdáleností od náboje q). Proto

$$\Phi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

(b) Protože neznáme rozložení nábojů na povrchu kovu, nelze použít přímou integraci podle (2.5). Zdálo by se tedy, že je nutné řešit Poissonovu rovnici (2.4) v oblasti $y \geq 0$ a použít zmíněné okrajové podmínky. Naštěstí lze řešení najít jednodušším způsobem pomocí metody *nábojového zobrazení*.

Metoda nahrazuje původní zadání novou ekvivalentní úlohou, která vede ke stejnému rozložení polí uvnitř zadané oblasti. Nová úloha neobsahuje rozhraní a příslušné okrajové podmínky jsou nahrazeny vhodně zvolenými náboji.

Pro naše zadání je zřejmé, že ekvivalentní problém je tvořen dvěma bodovými náboji podle obr. 2.1 vpravo. Platí tedy

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (2.9)$$

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right), \quad (2.10)$$

$$\vec{r}_1 \equiv (x, y - a, z), \quad (2.11)$$

$$\vec{r}_2 \equiv (x, y + a, z). \quad (2.12)$$

Pro kontrolu ověříme, zda je splněna okrajová podmínka na povrchu vodiče. Snadno je vidět, že $r_1 = r_2$ pro $y = 0$ a tedy $\Phi(x, y = 0, z) = 0$, jak bylo požadováno. Intenzita elektrického pole je kolmá na povrch vodiče (je vidět, že platí $E_x(x, y = 0, z) = E_z(x, y = 0, z) = 0$)

$$E_y|_{y=0+} = -\frac{qa}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2 (1 + \rho^2)^{3/2}}, \quad (2.13)$$

$$\rho^2 \equiv \frac{x^2 + z^2}{a^2}. \quad (2.14)$$

(c) Použijme (1.5). Zvolíme $\vec{n}$ ve směru osy y a uvědomíme si, že $\vec{D}_1 = 0$, protože ve vodiči je $\vec{E} = 0$.

$$\sigma(x, z) = \vec{D}_2 \cdot \vec{n} = \epsilon_0 E_y(x, y = 0+, z) = -\frac{q}{2\pi a^2 (1 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (2.15)$$

(d) Celkový náboj Q na povrchu vodiče vypočteme integrací hustoty náboje přes celý povrch vodiče. Použijeme-li polární souřadnice $r \equiv \sqrt{x^2 + z^2}$ a ϕ , dostaneme

$$\begin{aligned} Q &= \int \sigma dS = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\phi (\sigma) = \left| \begin{array}{l} r = a\rho \\ dr = a d\rho \end{array} \right| = \int_0^\infty a^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \left[-\frac{q}{2\pi a^2 (1 + \rho^2)^{3/2}} \right] = \\ &= -q \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(1 + \rho^2)^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} s = 1 + \rho^2 \\ ds = 2\rho d\rho \end{array} \right| = -q \int_1^\infty \frac{ds}{2s^{3/2}} = -q. \end{aligned}$$

Tentýž výsledek lze obdržet úvahou pomocí Gaussovy věty elektrostatiky (provedte sami).

(e) Ze symetrie vyplývá, že síla je rovnoběžná s osou y . Podle Coulombova zákona působí elementární náboj $\sigma(x, z)dS$ na náboj q silou, jejíž průmět do y je dán vztahem

$$dF_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(x, z)dSqa}{(x^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(x, z)dSqa}{a^3 (1 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2 dS}{2\pi a^4 (1 + \rho^2)^3}.$$

Pro celkovou sílu platí

$$\begin{aligned} F_y &= \int dF_y = \int_0^\infty a\rho d(a\rho) \int_0^{2\pi} d\phi \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q^2}{2\pi a^4 (1+\rho^2)^3} \right] = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(1+\rho^2)^3} = \\ &= \left| \frac{s=1+\rho^2}{ds=2\rho d\rho} \right| = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_1^\infty \frac{ds}{2s^3} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{1}{4} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 (2a)^2}. \end{aligned}$$

Stejný výsledek bychom snadno obdrželi pomocí ekvivalentní úlohy (vodič je nahrazen nábojem $-q$).

2.3 Ortogonální funkce

Úloha 2.3 Systém (množina) komplexních funkcí $f_n(x)$ reálné proměnné x se nazývá *ortogonální* na intervalu $\langle a, b \rangle$, pokud platí

$$\int_a^b f_m^*(x) f_n(x) dx = 0 \quad \text{pro } m \neq n \quad (2.16)$$

a zároveň v případě $m = n$ má tento integrál konečnou nenulovou hodnotu

$$\int_a^b f_n^*(x) f_n(x) dx \equiv N_n \neq 0, \quad (2.17)$$

kterou jsme označili symbolem N_n . Dokažte, že funkce $\sin(n\pi x/p)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, jsou ortogonální na intervalu $\langle 0, p \rangle$.

Úloha 2.4 Systém ortogonálních funkcí $f_n(x)$ se nazývá *úplný*, pokud každou funkci $g(x)$ můžeme na intervalu $\langle a, b \rangle$ vyjádřit pomocí lineární kombinace funkcí $f_n(x)$ (tzv. rozvoj funkce $g(x)$ podle funkcí $f_n(x)$)

$$g(x) = \sum_n A_n f_n(x). \quad (2.18)$$

Pro dané $f_n(x)$ a $g(x)$ určete koeficienty rozvoje A_n .

Řešení: Rovnici (2.18) vynásobíme funkcí $f_m^*(x)$ a integrujeme přes interval $\langle a, b \rangle$

$$\int_a^b f_m^*(x) g(x) dx = \int_a^b f_m^*(x) \sum_n A_n f_n(x) dx. \quad (2.19)$$

Na pravé straně zaměníme pořadí sumace a integrace¹, integrál vypočteme pomocí (2.16) a (2.17) a nakonec dostaneme

$$A_m = \frac{1}{N_m} \int_a^b f_m^*(x) g(x) dx. \quad (2.20)$$

¹Tato záměna v případě nekonečné řady vyžaduje splnění určitých podmínek a ty jsou zde splněny.

Úloha 2.5 Nejznámější příklad úplného systému je množina obsahující trigonometrické funkce. Na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ je tvořena funkcemi

$$1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots \quad (2.21)$$

Rozvoj (2.18) do těchto funkcí se nazývá *Fourierova řada* a obvykle se zapisuje ve tvaru

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]. \quad (2.22)$$

(Namísto A_n jsou nyní použity koeficienty a_n a b_n , označení koeficientu $a_0/2$ u konstantní funkce 1 odpovídá konvenci.) Pro dané $g(x)$ určete koeficienty rozvoje.

Řešení: Můžeme použít stejný postup jako v příkladě 2.4, nebo postupně dosadit funkce 1, $\cos(nx)$ a $\sin(nx)$ do (2.20). Nakonec obdržíme

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(mx) dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(mx) dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.24)$$

Všimněte si, že díky volbě koeficientu $a_0/2$ u konstantní funkce $1 \equiv \cos(0x)$, dostaneme jednotné vyjádření pro a_m .

Úloha 2.6 Rozložte do Fourierovy řady funkci

$$f(x) = \begin{cases} f_a, & 0 < x < \pi, \\ f_b, & -\pi < x < 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Řešení: Přímým výpočtem integrálů (2.23) a (2.24) dostaneme

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f_b \cos(mx) dx + \int_0^{\pi} f_a \cos(mx) dx \right] = \begin{cases} f_a + f_b, & m = 0, \\ 0, & m = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f_b \sin(mx) dx + \int_0^{\pi} f_a \sin(mx) dx \right] = \frac{1}{m\pi} (f_b - f_a) (\cos m\pi - \cos 0) \\ &= \begin{cases} 2(f_a - f_b)/(m\pi), & m = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Hledaný rozvoj funkce (2.25) je tedy

$$f(x) = \frac{f_a + f_b}{2} + \frac{2(f_a - f_b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)x]. \quad (2.26)$$

2.4 Řešení Laplaceovy rovnice v kartézských souřadnicích

Úloha 2.7 Řešte Laplaceovu rovnici pomocí metody *separace proměnné* v kartézských souřadnicích.

Řešení: Při použití metody separace proměnné předpokládáme řešení parciální diferenciální rovnice ve tvaru součinu funkcí jedné proměnné

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (2.27)$$

Po dosazení do (2.6) obdržíme

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0.$$

Tuto rovnici vynásobíme $1/XYZ$ a upravíme tak, aby jednotlivé členy závisely pouze na jedné proměnné. Např. je možné psát

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = \alpha. \quad (2.28)$$

Uvažujme rovnici vyjádřenou prvním znaménkem $=$. Rovnice platí pro každé x, y, z , avšak její levá strana závisí pouze na x a pravá pouze na y a z . To je možné jen tehdy, když obě strany jsou rovny téže konstantě, kterou označíme α (proto jsme připsali za pravou stranu $= \alpha$). Z (2.28) tedy dostaneme

$$\begin{aligned} X'' - \alpha X &= 0, \\ -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} &= \alpha. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Podobně poslední rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{Y''}{Y} = -\alpha - \frac{Z''}{Z} = \beta.$$

Levá strana rovnice vyjádřené prvním znaménkem $=$ závisí pouze na y a pravá pouze na z . Obě strany jsou tedy rovny jedné a téže konstantě, kterou jsme označili β . Platí tedy

$$Y'' - \beta Y = 0, \quad (2.30)$$

$$Z'' + (\alpha + \beta)Z = 0. \quad (2.31)$$

Vidíme, že namísto parciální diferenciální rovnice dostaneme tři obyčejné diferenciální rovnice (2.29), (2.30) a (2.31), jejichž obecná řešení jsou

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad k^2 \equiv \alpha, \quad (2.32)$$

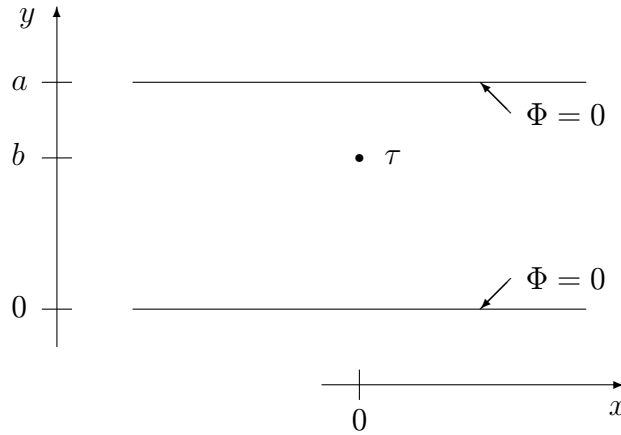
$$Y(y) = Ce^{py} + De^{-py}, \quad p^2 \equiv \beta, \quad (2.33)$$

$$Z(z) = Ee^{iqz} + Fe^{-iqz}, \quad q^2 \equiv k^2 + p^2. \quad (2.34)$$

Je nutné si všimnout, že

- A, B, C, D, E a F jsou libovolné komplexní konstanty. Totéž tvrzení platí také o konstantách k, p (nebo α, β).
- Řešení Laplaceovy rovnice vyjádřené pomocí vztahů (2.27), (2.32), (2.33) a (2.34) představuje velmi širokou třídu řešení. Lineární kombinace (superpozice) těchto řešení pro různá k a p je samozřejmě také řešením Laplaceovy rovnice.
- Abychom vybrali konkrétní řešení, je nutné znát okrajové podmínky, tj. zmíněné konstanty se určí pomocí okrajových podmínek (uvidíme v následujících úlohách).
- Vztahy (2.32)–(2.34) lze napsat v různých formách. Např. pokud bychom věděli, že (pro danou úlohu) je $\alpha < 0$, mohli bychom definovat $k^2 \equiv -\alpha$, a pak namísto (2.32) napsat $X(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ nebo $X(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$.

Úloha 2.8 Nalezněte elektrické pole vytvořené lineárním nábojem (tenkým přímým nabitým vláknem) ve vakuu mezi dvěma uzemněnými rovinnými paralelními vodiči podle obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Roviny vodičů jsou $y = 0$ a $y = a$. Náboj je rovnoměrně rozložen na přímce $y = b$, $x = 0$ s délkovou hustotou τ (náboj připadající na jednotku délky).

Řešení: (a) Nejprve proveďte kvalitativní rozbor podobně jako při řešení úlohy 2.2. Připomeňte si vztah pro intenzitu elektrického pole náboje rovnoměrně rozloženého na přímce, který je známý ze základního kurzu fyziky (snadno odvodíme pomocí Gaussovy věty elektrostatiky v integrálním tvaru).

(b) Vzhledem k symetrii úlohy potenciál nezávisí na z

$$\Phi = \Phi(x, y).$$

Ze zadání dále vyplývají okrajové podmínky pro potenciál:

$$\Phi|_{y=0} = 0, \quad (2.35)$$

$$\Phi|_{y=a} = 0, \quad (2.36)$$

$$\Phi|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad (2.37)$$

$$\Phi|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2.38)$$

Vzhledem k tomu, že mezi vodiči existuje náboj, měli bychom řešit Poissonovu rovnici s výše uvedenými okrajovými podmínkami. Lze však postupovat jinak: mezi vodiči definovat takové dvě oblasti, v nichž není žádný náboj. Bodový náboj bude ležet právě na hranici mezi těmito oblastmi. Potom v každé oblasti budeme Laplaceovu rovnici řešit zvlášť a řešení v obou oblastech svážeme okrajovými podmínkami na zvolené hranici, obsahující náboj.

Nyní už můžeme využít k řešení výsledky úlohy 2.7. Laplaceova rovnice platí v oblastech bez nábojů. Mezi vodiči si můžeme představit dvě takové oblasti definované podmínkami $x < 0$ a $x > 0$, řešení Laplaceovy rovnice v těchto oblastech označíme pořadě $\Phi^{(-)}$ a $\Phi^{(+)}$. (Volba těchto oblastí není jednoznačná, avšak jak dále uvidíme, naše volba povede ke snadnému použití okrajových podmínek.) Okrajové podmínky (2.35) – (2.38) musíme ještě doplnit okrajovými podmínkami v rovině $x = 0$. Zde využijeme spojitost potenciálu a podmínku (1.5).

Protože potenciál nezávisí na z položíme v (2.27) $Z = 1$ a podle (2.31) je $\alpha + \beta = 0$, tj. $k^2 + p^2 = 0$, odkud $p = ik$. Všimněte si, že pokud je jedno z čísel k nebo p reálné, musí být druhé ryze imaginární.

Nyní použijeme okrajové podmínky (2.35) a (2.36). Vzhledem k (2.27) a (2.33) dostaneme

$$\begin{aligned} C + D &= 0, \\ Ce^{pa} + De^{-pa} &= 0. \end{aligned}$$

Řešení těchto rovnic je $C = -D$ a $pa = in\pi$, kde $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ (Případ $pa = 0$ můžeme vyloučit, protože vede k triviálnímu řešení $Y(y) = 0$). Vidíme, že p je ryze imaginární, proto $k = -ip$ je reálné a může nabývat jen diskretních hodnot

$$k_n = \frac{n\pi}{a}. \quad (2.39)$$

Namísto (2.33) tedy máme

$$Y_n(y) = C_n e^{ik_n y} - C_n e^{-ik_n y} = 2iC_n \sin(k_n y) \equiv K_n \sin(k_n y), \quad (2.40)$$

kde $K_n \equiv 2iC_n$. Všiměte si, že

- výsledek vyjádřený vztahy (2.39) a (2.40) bylo možné snadno „uhádnout“ z charakteru okrajových podmínek (2.35) a (2.36);
- pro každé k_n (nebo n) existuje určité řešení rovnice (2.30) (a tedy i Laplaceovy rovnice). Proto jednotlivá řešení a v nich obsažené konstanty rozlišujeme pomocí indexu n ;
- řešení platí v obou oblastech $x < 0$ a $x > 0$ (avšak obecně mohou být konstanty K_n v každé oblasti různé).

Dále použijme podmínku (2.37), která se vztahuje na řešení Laplaceovy rovnice v oblasti $x < 0$. Pokud předpokládáme $k_n > 0$, pak vzhledem k (2.32) musí být $B = 0$ a tedy

$$X_n(x) = A_n \exp(k_n x), \quad x < 0, \quad k_n > 0.$$

Poznamenejme, že kdybychom naopak předpokládali $k_n < 0$, obdrželi bychom

$$X_n(x) = B_n \exp(-k_n x), \quad x < 0, \quad k_n < 0.$$

Řešení Laplaceovy rovnice pro určité k_n je pak

$$\Phi_n = X_n Y_n.$$

Lineární kombinace těchto řešení je opět řešením Laplaceovy rovnice, a tedy co možná nejobecnější řešení splňující dosud uvažované okrajové podmínky je dáno vztahem

$$\Phi = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} X_n Y_n.$$

Nyní si uvědomíme, že případ $k_n < 0$ (tj. $n < 0$) můžeme vyloučit, protože funkce $X_{-n} Y_{-n}$ je lineárně závislá na funkci $X_n Y_n$ (liší se pouze multiplikativní konstantou). Dále bez újmy na obecnosti lze zvolit $K_n = 1$ ($X_n Y_n$ pro různá K_n se opět liší pouze multiplikativní konstantou).

Potenciál v oblasti $x < 0$ má tedy tvar

$$\Phi^{(-)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(k_n x) \sin(k_n y), \quad x < 0.$$

Obdobným postupem určíme potenciál v oblasti $x > 0$

$$\Phi^{(+)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-k_n x) \sin(k_n y), \quad x > 0.$$

Nyní zbývá určit konstanty A_n a B_n . K tomu využijeme podmínky na rozhraní v $x = 0$. Ze spojitosti potenciálu vyplývá

$$\Phi^{(-)}\big|_{x=0-} = \Phi^{(+)}\big|_{x=0+},$$

a tedy $A_n = B_n$. Můžeme proto napsat

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(\pm k_n x) \sin(k_n y), \quad (2.41)$$

přitom horní znaménko platí pro $x \leq 0$ spodní pro $x \geq 0$.

Nakonec využijeme podmínku (1.5) na rozhraní $x = 0$ pro $\vec{D}$. Před tím je potřeba vypočítat intenzitu elektrického pole

$$\vec{E}(x, y) = -\vec{\nabla}\Phi = \begin{pmatrix} \mp \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n \exp(\pm k_n x) \sin(k_n y) \\ - \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n \exp(\pm k_n x) \cos(k_n y) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Všimněte si, že složka E_y (tečná složka k rozhraní) je pro $x = 0$ spojitá, avšak složka E_x (normálová složka k rozhraní) je pro $x = 0$ nespojitá.

Konečně můžeme použít podmínku (1.5). Plošnou hustotu náboje σ v rovině $x = 0$ vyjádříme pomocí δ -funkce,

$$\sigma(y) = \tau \delta(y - b).$$

Potom

$$\varepsilon_0 E_x|_{x=0+} - \varepsilon_0 E_x|_{x=0-} = \tau \delta(y - b).$$

Dosadíme-li za E_x z (2.42), dostaneme

$$2\varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n \sin(k_n y) = \tau \delta(y - b).$$

Všimněte si, že stejný výsledek bychom obdrželi při použití okrajové podmínky (2.8).

Z poslední rovnice určíme A_n postupem použitým při řešení úlohy 2.4. Před tím si uvědomíme, že funkce $\sin(k_n y)$ jsou ortogonální na intervalu $\langle 0, a \rangle$. Rovnici tedy vynásobíme funkcí $\sin(k_m y)$ a integrujme přes zmíněný interval

$$\int_0^a 2\varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n \sin(k_n y) \sin(k_m y) dy = \int_0^a \tau \delta(y - b) \sin(k_m y) dy.$$

Na pravé straně použijeme známou vlastnost δ -funkce², na levé straně zaměníme pořadí sumace a integrace:

$$2\varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n \int_0^a \sin(k_n y) \sin(k_m y) dy = \tau \sin(k_m b). \quad (2.43)$$

² $\int_a^b \delta(y - y_0) f(y) dy = f(y_0)$ pokud $a < y_0 < b$.

Protože

$$\int_0^a \sin(k_n y) \sin(k_m y) dy = \begin{cases} 0 & k_n \neq k_m \\ a/2 & k_n = k_m \end{cases}, \quad (2.44)$$

z (2.43) dostaneme

$$A_n = \frac{\tau}{\varepsilon_0 k_n a} \sin(k_n b), \quad (2.45)$$

a tedy výsledný vztah pro potenciál je

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau}{\varepsilon_0 k_n a} \sin(k_n b) \exp(\pm k_n x) \sin(k_n y), \quad (2.46)$$

přitom horní znaménko platí pro $x \leq 0$ spodní pro $x \geq 0$ a k_n je dáno vztahem (2.39).

Hledané pole je znázorněno na obrázku 2.3 pro případ $b/a = 0,70$. K výpočtu pole byly přímo využity vztahy (2.41) a (2.42) spolu s (2.39) a (2.45). Součet nekonečných řad byl aproximován součtem jejich prvních 100 prvků.

2.5 Řešení Laplaceovy rovnice v cylindrických souřadnicích

Úloha 2.9 Vyjádřete operátor Δ v cylindrických souřadnicích.

Řešení: Cylindrické souřadnice (r, ϕ, z) jsou definovány vztahy

$$x = r \cos \phi \quad (2.47)$$

$$y = r \sin \phi \quad (2.48)$$

$$z = z. \quad (2.49)$$

Inverzní vztahy jsou

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.50)$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (2.51)$$

$$z = z. \quad (2.52)$$

Nejprve je výhodné vypočítat derivace

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (2.53)$$

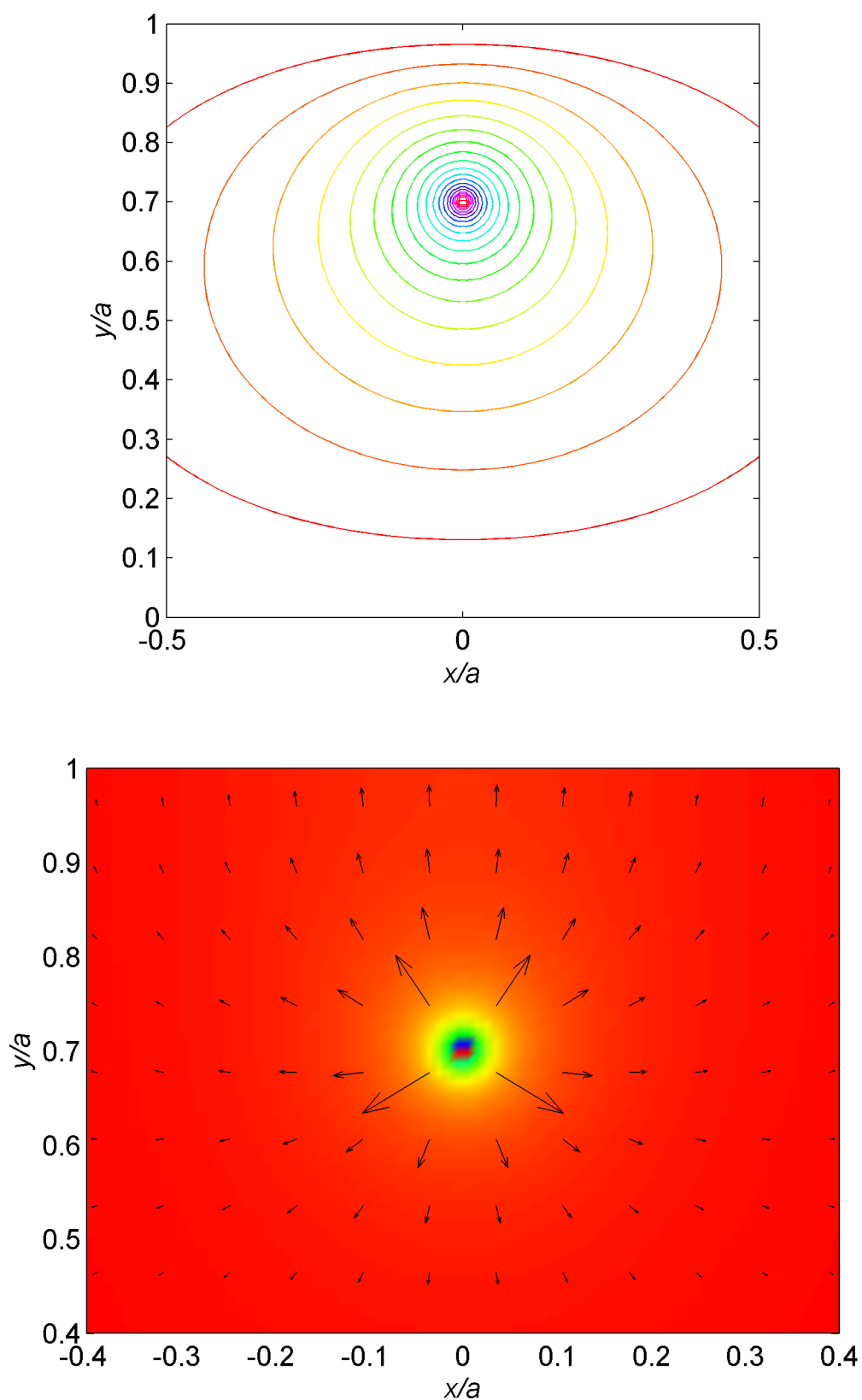
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{r^2}. \quad (2.56)$$

S využitím výše uvedených vztahů postupně vypočteme derivace složené funkce $f(r, \phi, z) = f[r(x, y), \phi(x, y), z]$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$



Obrázek 2.3: K úloze 2.8. Znázornění ekvipotenciálních ploch (nahore) a rozložení intenzity elektrického pole v oblasti kolem lineárního náboje (dole, barva znázorňuje velikost $\vec{E}$).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x}{r} \left(\frac{x}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \phi} \right) \\
&\quad + \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{y}{r^2} \left(\frac{x}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \phi} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \phi} \right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{y}{r} \left(\frac{y}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \phi} \right) \\
&\quad - \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{x}{r^2} \left(\frac{y}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \phi} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \phi} \right)
\end{aligned}$$

a nakonec obdržíme

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (2.57)$$

nebo také

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (2.58)$$

Úloha 2.10 Řešte Laplaceovu rovnici pomocí separace proměnných v cylindrických souřadnicích.

Řešení: Podle (2.57) má v cylindrických souřadnicích (r, ϕ, z) Laplaceova rovnice tvar

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(r, \phi, z) = 0. \quad (2.59)$$

Pokud předpokládáme řešení ve tvaru

$$\Phi(r, \phi, z) = R(r)F(\phi)Z(z) \quad (2.60)$$

obdržíme postupně

$$\begin{aligned}
\left(R'' + \frac{1}{r} R' \right) FZ + \frac{1}{r^2} F'' RZ + FRZ'' &= 0 \\
\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{F''}{r^2 F} &= -\frac{Z''}{Z} = -\kappa^2.
\end{aligned} \quad (2.61)$$

Uvažujme rovnici vyjádřenou prvním znaménkem $=$. Její levá strana závisí pouze na r a ϕ , pravá pouze na z . To je možné jen tehdy, když obě strany jsou rovny stejné separační konstantě, kterou jsme označili $-\kappa^2$. (Uvědomme si, že volba znaménka separační konstanty je libovolná, pokud je κ komplexní číslo. Také nepoužijeme např. označení α , protože vidíme, že v řešení by vystupovalo $\sqrt{-\alpha}$, stejně tak jsme mohli ve vztahu (2.28) napsat rovnou k^2 . Kromě toho dále uvidíme, že zde řešené úlohy vedou většinou na reálné a kladné κ , tj. separační konstanta $-\kappa^2$ je záporná.) Platí tedy

$$Z'' - \kappa^2 Z = 0, \quad (2.62)$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \frac{F''}{F} = -r^2 \kappa^2.$$

Poslední rovnici přepíšeme do tvaru

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 \kappa^2 = -\frac{F''}{F} = p^2,$$

kde levá strana závisí pouze na r a pravá pouze na ϕ , a tedy obě strany rovnice se musí rovnat stejné konstantě, kterou jsme označili jako p^2 :

$$F'' + p^2 F = 0, \quad (2.63)$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\kappa^2 - \frac{p^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (2.64)$$

Vidíme, že namísto řešení parciální diferenciální rovnice (2.59) musíme řešit tři obyčejné diferenciální rovnice (2.62), (2.63) a (2.64). Obecná řešení prvních dvou rovnic jsou dobře známá, vytvoříme je pomocí lineární kombinace funkcí

$$Z(z) = e^{\pm \kappa z}, \quad (2.65)$$

$$F(\phi) = e^{\pm i p \phi}. \quad (2.66)$$

Pro $\kappa = 0$ je vedle konstanty řešením (2.62) také funkce $Z(z) = z$, obdobné tvrzení platí pro případ $p = 0$.

Obecně jsou κ a p komplexní čísla. Pokud však chceme napsat řešení rovnice (2.63) v plném rozsahu úhlů $0 \leq \phi \leq 2\pi$, musí platit $F(\phi) = F(\phi + 2\pi)$, a to je možné pouze pro $p = 0, 1, 2, \dots$

Dále budeme hledat řešení rovnice (2.64).

(i) Předpokládejme nejprve $\kappa \neq 0$. (*Besselova rovnice*)

Pak řešením jsou cylindrické funkce argumentu κr , např. Besselova funkce prvního druhu $J_p(\kappa r)$, Neumannova funkce (Besselova funkce druhého druhu) $N_p(\kappa r)$, nebo Hankelovy funkce prvního a druhého druhu $H_p^{(1)}(\kappa r) \equiv J_p(\kappa r) + iN_p(\kappa r)$, $H_p^{(2)}(\kappa r) \equiv J_p(\kappa r) - iN_p(\kappa r)$. Protože se jedná o diferenciální rovnici druhého řádu, musí obecné řešení obsahovat dvě nezávislé cylindrické funkce. Lze ukázat, že pokud p není celé číslo, jsou funkce J_p a J_{-p} lineárně nezávislé, tj. obecné řešení (pro určité p) je

$$R_p(r) = A_p J_p(\kappa r) + B_p J_{-p}(\kappa r). \quad (2.67)$$

Pokud je p celé číslo, jsou lineárně nezávislé páry J_p, N_p a $H_p^{(1)}, H_p^{(2)}$ a obecné řešení lze napsat ve tvaru

$$R_p(r) = A_p J_p(\kappa r) + B_p N_p(\kappa r), \quad (2.68)$$

nebo

$$R_p(r) = A_p H_p^{(1)}(\kappa r) + B_p H_p^{(2)}(\kappa r). \quad (2.69)$$

Poznamenejme, že pokud je $\kappa \equiv i\gamma$ ryze imaginární (nebo pokud bychom v rovnici (2.61) napsali γ^2 namísto $-\kappa^2$), je zvykem zapisovat řešení pomocí modifikovaných Besselových funkcí $I_p(\gamma r)$ a $K_p(\gamma r)$ definovaných vztahy

$$I_p(x) \equiv i^{-p} J_p(ix), \quad (2.70)$$

$$K_p(x) \equiv \frac{\pi}{2} i^{p+1} H_p^{(1)}(ix). \quad (2.71)$$

(ii) Nakonec nalezneme řešení rovnice (2.64) pokud $\kappa = 0$. Nyní se jedná o rovnici *Eulerova typu*, která se řeší pomocí substituce

$$r = e^t, \quad dr = e^t dt.$$

Postupně vypočteme derivace funkce $R[t(r)]$

$$R' \equiv \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{dR}{dt} e^{-t}$$

$$R'' \equiv \frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dR}{dr} \right) = \frac{d^2 R}{dt^2} e^{-2t} - \frac{dR}{dt} e^{-2t}$$

Odsud dosadíme za R' a R'' do (2.64). Dostaneme rovnici

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - p^2 R = 0,$$

jejíž řešení známe:

$$R_p(t) = \begin{cases} A_p e^{pt} + B_p e^{-pt} & p \neq 0 \\ A_0 + B_0 t & p = 0. \end{cases}$$

Vrátíme-li se k původní proměnné r , dostaneme

$$R_p(r) = \begin{cases} A_p r^p + B_p r^{-p} & p \neq 0 \\ A_0 + B_0 \ln r & p = 0. \end{cases} \quad (2.72)$$

Je nutné si všimnout, že

- řešení Laplaceovy rovnice vyjádřené pomocí vztahů (2.60), (2.65), (2.66) a (2.67)–(2.69) nebo (2.72) představuje velmi širokou třídu řešení. Lineární kombinace (superpozice) těchto řešení pro různá κ a p je samozřejmě také řešením Laplaceovy rovnice.
- výběr konkrétního řešení provedeme pomocí okrajových podmínek (uvidíme v následujících úlohách).

Úloha 2.11 Určete elektrické pole vytvořené bodovým nábojem q umístěným na ose duté vodivé uzemněné válcové plochy o poloměru a .

Řešení: (a) Nejprve porovíme kvalitativní rozbor, podobně jako při řešení úlohy 2.8.

(b) Přesné řešení.

Postup je obdobou úlohy 2.8. Vzhledem k symetrii úlohy použijeme nyní válcové souřadnice, a tedy přímo využijeme výsledků úlohy příkladu 2.10. Osu z zvolíme tak, aby byla totožná s osou válce a náboj q ležel v jejím počátku.

Vzhledem k symetrii úlohy potenciál nezávisí na ϕ , tj.

$$\Phi = \Phi(r, z).$$

Ze zadání vyplývají tyto okrajové podmínky

$$\Phi|_{r=a} = 0, \quad (2.73)$$

$$\Phi|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad (2.74)$$

$$\Phi|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2.75)$$

Vzhledem k tomu, že mezi vodiči existuje náboj, měli bychom řešit Poissonovu rovnici s výše uvedenými okrajovými podmínkami. Lze však postupovat jinak: uvnitř válce definovat takové dvě oblasti, v nichž není žádný náboj. Bodový náboj bude ležet právě na hranici mezi těmito oblastmi. Potom v každé oblasti budeme Laplaceovu rovnici řešit zvlášť a řešení v obou oblastech svážeme okrajovými podmínkami na zvolené hranici, obsahující náboj. V tomto případě

budeme řešit zvlášť Laplaceovu rovnici pro $z < 0$ a $z > 0$, příslušná řešení označíme pořadě $\Phi^{(-)}$ a $\Phi^{(+)}$. Tato řešení pak svážeme okrajovými podmínkami v rovině $z = 0$:

$$\Phi^{(-)} \Big|_{z=0-} = \Phi^{(+)} \Big|_{z=0+}, \quad (2.76)$$

$$-\frac{\partial \Phi^{(+)}}{\partial z} \Big|_{z=0+} + \frac{\partial \Phi^{(-)}}{\partial z} \Big|_{z=0-} = \frac{\sigma(r)}{\varepsilon_0}, \quad (2.77)$$

kde hustotu plošného náboje $\sigma(r)$ v rovině $z = 0$ vyjádříme pomocí δ -funkce:

$$\sigma(\vec{\rho}) = q\delta^{(2)}(\vec{\rho}), \quad (2.78)$$

kde $\rho = (x, y)$ a $\delta^{(2)}(\vec{\rho})$ je funkcí dvou proměnných. Formálně píšeme $\delta^{(2)}(\vec{\rho}) = \delta(r)/2\pi r$.

Řešení Laplaceovy rovnice v cylindrických souřadnicích bylo provedeno v úloze 2.10. Protože potenciál nyní nezávisí na ϕ , položíme v (2.60) $F(\phi) = 1$ a podle (2.63) je $p = 0$. Tedy řešení (2.68) nyní zní:

$$R(r) = A_0 J_0(\kappa r) + B_0 N_0(\kappa r).$$

Protože Neumannova funkce $N_0(\kappa r)$ pro $r = 0$ diverguje, musí být $B_0 = 0$. Nyní můžeme užít okrajovou podmínku (2.73). Ta vyžaduje, aby

$$J_0(ka) = 0. \quad (2.79)$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho diskrétních řešení, $k_n^{(0)} \equiv k_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, přitom $k_n > 0$.

Řešení problému bude tedy vytvořeno z řešení

$$R_n(r) = C_n J_0(k_n r),$$

kde $C_n \equiv A_0^{(n)}$ a k_n jsou řešení rovnice (2.79).

Řešení pro $z < 0$ musí splňovat okrajovou podmínku (2.74), pro $z > 0$ podmínku (2.75), a proto (2.65) dává

$$Z_n(z) = e^{\pm k_n z},$$

kde znaménko $+$ platí pro $z < 0$ a znaménko $-$ pro $z > 0$.

Obecná řešení Laplaceovy rovnice $\Phi^{(-)}$ a $\Phi^{(+)}$ jsou tedy dána lineárními kombinacemi součinů funkcí $R_n Z_n$:

$$\Phi^{(-)}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(-)} J_0(k_n r) \exp(k_n z), \quad (2.80)$$

$$\Phi^{(+)}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(+)} J_0(k_n r) \exp(-k_n z). \quad (2.81)$$

Ze spojitosti potenciálu (2.76) plyne $C_n^{(-)} = C_n^{(+)} \equiv C_n$. A nakonec, konstanty C_n určíme z okrajové podmínky (2.77), kam dosadíme (2.80) a (2.81):

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n k_n J_0(k_n r) = \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{\delta(r)}{2\pi r}. \quad (2.82)$$

Z poslední rovnice určíme C_n obdobným postupem, jako koeficienty A_m v úloze 2.4. Funkce $J_0(k_n r)$ pro $n = 1, 2, \dots$ totiž tvoří úplný ortogonální systém funkcí na intervalu $(0, a)$ s vahou r , tj. platí

$$\int_0^a J_0(k_n r) J_0(k_m r) r dr = \begin{cases} 0 & k_n \neq k_m \\ [a J_1(k_n a)]^2 / 2 & k_n = k_m. \end{cases} \quad (2.83)$$

Proto rovnici (2.82) vynásobíme funkcí $J_0(k_m r)r$ a integrujeme přes r v intervalu $(0, a)$, přitom na levé straně zaměníme pořadí sumace a integrace:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n k_n \int_0^a J_0(k_n r) J_0(k_m r) r dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \int_0^a \delta(r) J_0(k_m r) dr.$$

Užijeme (2.83) a pravidlo pro integraci δ -funkce

$$\int_0^a \delta(r) J_0(k_m r) dr = J_0(0),$$

a dostaneme

$$2C_m k_m \frac{[aJ_1(k_m a)]^2}{2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} J_0(0).$$

Poněvadž $J_0(0) = 1$, nakonec

$$C_m = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 k_m [aJ_1(k_m a)]^2}. \quad (2.84)$$

a tedy výsledný vztah pro potenciál zní

$$\Phi(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 k_m [aJ_1(k_m a)]^2} J_0(k_m r) \exp(\pm k_m z). \quad (2.85)$$

kde horní znaménko platí pro $z \leq 0$ a spodní znaménko pro $z \geq 0$.

Rozložení potenciálu je znázorněno na obrázku 2.4. Součet nekonečné řady byl aproximován součtem prvních 200 prvků.

Závěrem určíme intenzitu elektrického pole $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$:

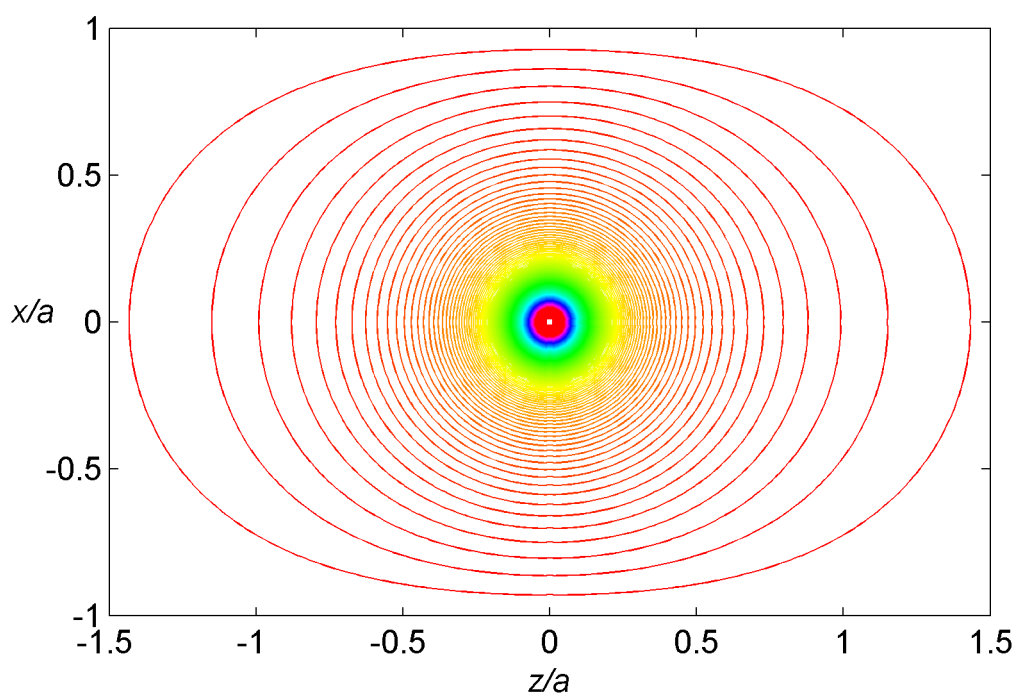
$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\phi \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} C_n k_n J_1(k_n r) \exp(\pm k_n z) \\ 0 \\ \mp \sum_{n=1}^{\infty} C_n k_n J_0(k_n r) \exp(\pm k_n z) \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Zde jsme využili vztah $J'_0 = -J_1$. Všiměte si, že výraz pro E_z neplatí pro $z = 0$ (normálová složka $\vec{E}$ není spojitá).

Úloha 2.12 Nekonečně dlouhý válec o poloměru R vložíme do homogenního vnějšího pole $\vec{E}_0$, které je kolmé k ose válce. Určete výsledné pole v případě (a) uzeměného kovového, (b) dielektrického válce a (c) plošnou hustotu náboje indukovaného na kovovém válci.

Řešení: Vzhledem k symetrii úlohy použijeme válcové souřadnice, a tedy přímo využijeme výsledků úlohy 2.10. Osu z zvolíme tak, aby byla totožná s osou válce a Laplaceovu rovnici budeme řešit zvlášť uvnitř a vně válce. Protože potenciál nemůže záviset na z , je $Z(z) = 1$, $\kappa = 0$ a řešení Laplaceovy rovnice má obecný tvar (kombinace řešení s různým celočíselným p , viz. poznámka za vztahem (2.66))

$$\Phi = \sum_{p=1}^{\infty} (A_p r^p + B_p r^{-p}) [C_p \exp(ip\phi) + D_p \exp(-ip\phi)] + A_0 + B_0 \ln r, \quad (2.87)$$



Obrázek 2.4: K úloze 2.11. Znázornění ekvipotenciálních ploch. Náboj je v bodě $[0,0]$, osa válce je totožná s osou z .

nebo

$$\Phi = \sum_{p=1}^{\infty} (A_p r^p + B_p r^{-p}) [\tilde{C}_p \cos(p\phi) + \tilde{D}_p \sin(p\phi)] + A_0 + B_0 \ln r. \quad (2.88)$$

Konstanty $A_p, B_p, C_p, D_p, \tilde{C}_p, \tilde{D}_p$ jsou různé uvnitř a vně válce.

Jaké jsou okrajové podmínky problému? Ze zadání vyplývá asymptotická okrajová podmínka pro intenzitu elektrické pole

$$\vec{E}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \vec{E}_0,$$

kterou lze přepsat do podmínky pro potenciál

$$\Phi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -E_0 r \cos \phi \quad (2.89)$$

(ověřte pomocí $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$). Dále při řešení využijeme okrajových podmínek na povrchu válce.

Hledejme nejprve řešení *vně* válce, $r \geq R$.

Přihlédneme-li k okrajové podmínce (2.89) a uvědomíme-li si, že trigonometrické funkce v (2.88) jsou navzájem ortogonální, dostaneme

$$\begin{aligned} A_0^{(e)} &= 0, \\ B_0^{(e)} &= 0, \\ \tilde{D}_p^{(e)} &= 0, \quad \text{pro } p = 1, 2, 3, \dots \\ \tilde{C}_p^{(e)} &= 0, \quad \text{pro } p = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Proto

$$\Phi^{(e)}(r, \phi) = (A_1^{(e)} \tilde{C}_1^{(e)} r + B_1^{(e)} \tilde{C}_1^{(e)} r^{-1}) \cos \phi,$$

kde vzhledem k (2.89)

$$A_1^{(e)} \tilde{C}_1^{(e)} = -E_0.$$

Dále $a \equiv B_1^{(e)} \tilde{C}_1^{(e)}$ je zatím neznámá konstanta. Řešení vně válce má tedy tvar

$$\Phi^{(e)}(r, \phi) = (-E_0 r + a r^{-1}) \cos \phi, \quad r \geq R. \quad (2.90)$$

Nyní hledejme řešení *uvnitř* válce, $r \leq R$.

Vzhledem k omezenosti potenciálu v $r = 0$ musí být

$$B_p^{(i)} = 0, \quad \text{pro } p = 0, 1, 2, \dots$$

Využijeme-li spojitost potenciálu na povrchu válce $r = R$ a ortogonalitu trigonometrických funkcí v (2.88), dostaneme s přihlédnutím k (2.90)

$$\begin{aligned} A_0^{(i)} &= 0, \\ \tilde{D}_p^{(i)} &= 0, \quad \text{pro } p = 1, 2, 3, \dots \\ \tilde{C}_p^{(i)} &= 0, \quad \text{pro } p = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Tedy

$$\Phi^{(i)}(r, \phi) = A_1^{(i)} \tilde{C}_1^{(i)} r \cos \phi,$$

přičemž vzhledem k (2.90) musí platit

$$A_1^{(i)} \tilde{C}_1^{(i)} R = -E_0 R + a R^{-1}.$$

Řešení uvnitř válce má tedy tvar

$$\Phi^{(i)}(r, \phi) = (-E_0 + aR^{-2}) r \cos \phi, \quad r \leq R. \quad (2.91)$$

Zbývá určit konstantu a z okrajových podmínek na povrchu válce. Přitom musíme předpokládat jednu z následujících možností:

(a) *Kovový válec:*

$$\Phi^{(i)}(r, \phi) = 0 \Rightarrow -E_0 + aR^{-2} = 0 \Rightarrow a = E_0 R^2.$$

(b) *Dielektrický válec:*

Ze spojitosti normálové složky $\vec{D}$, tj. ze spojitosti $\varepsilon E_r = -\varepsilon \partial \Phi / \partial r$ v $r = R$ vyplývá

$$-\varepsilon^{(i)} (-E_0 + aR^{-2}) = -\varepsilon^{(e)} (-E_0 - aR^{-2}),$$

kde $\varepsilon^{(i)}$ a $\varepsilon^{(e)}$ je permitivita pořadě uvnitř a vně válce. Odtud dostaneme

$$a = \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(e)}} E_0 R^2. \quad (2.92)$$

Intenzita elektrického pole v případě (a) – kovový válec je

$$\vec{E}^{(e)}(r, \phi) = \vec{e}_r \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) E_0 \cos \phi - \vec{e}_\phi \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) E_0 \sin \phi, \quad (2.93)$$

$$\vec{E}^{(i)}(r, \phi) = 0; \quad (2.94)$$

v případě (b) – dielektrický válec je

$$\vec{E}^{(e)}(r, \phi) = \vec{e}_r \left(1 + \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(e)}} \frac{R^2}{r^2}\right) E_0 \cos \phi - \vec{e}_\phi \left(1 - \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(e)}} \frac{R^2}{r^2}\right) E_0 \sin \phi, \quad (2.95)$$

$$\vec{E}^{(i)}(r, \phi) = \vec{e}_r \frac{2\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(e)}} E_0 \cos \phi - \vec{e}_\phi \frac{2\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(e)}} E_0 \sin \phi = \vec{E}_0 \frac{2\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(e)}}. \quad (2.96)$$

Všimněte si, že pole uvnitř dielektrického válce je homogenní.

(c) Plošnou hustotu náboje určíme pomocí okrajové podmínky (1.5), která má nyní na povrchu kovového válce tvar

$$\varepsilon^{(e)} E_r^{(e)} \Big|_{r=R} = \sigma.$$

Pomocí (2.93) dostaneme

$$\sigma = 2\varepsilon^{(e)} E_0 \cos \phi. \quad (2.97)$$

Uvědomte si, která část válce je nabita kladným, resp. záporným nábojem a fyzikálně zdůvodněte. Přesvědčte se, že celkový náboj na válci je roven nule.

Úloha 2.13 (nepovinná) Náboj je rozložen na plášti nekonečného válce o poloměru R_1 s plošnou hustotou

$$\sigma(\phi) = \begin{cases} \sigma_a, & 0 < \phi < \pi, \\ \sigma_b, & -\pi < \phi < 0. \end{cases} \quad (2.98)$$

(Použity cylindrické souřadnice, osa z je totožná s osou válce.) Tato válcová plocha je obklopena souosou kovovou válcovou plochou o poloměru $R_2 > R_1$, která je uzeměná. Nalezněte elektrostatický potenciál.

Řešení: Potenciál nezávisí na z , a proto [srv. (2.88)]

$$\Phi(r, \phi) = \sum_{p=1}^{\infty} (A_p r^p + B_p r^{-p}) [C_p \cos(p\phi) + D_p \sin(p\phi)] + A_0 + B_0 \ln r. \quad (2.99)$$

Konstanty, které v něm vystupují jsou obecně různé ve třech oblastech, proto napíšeme

$$\Phi(r, \phi) = \begin{cases} \Phi^{(1)}(r, \phi), & r \leq R_1, \\ \Phi^{(2)}(r, \phi), & R_1 \leq r \leq R_2, \\ \Phi^{(3)}(r, \phi), & r \geq R_2. \end{cases} \quad (2.100)$$

Okrajové podmínky zní

$$\Phi^{(1)} \Big|_{r=R_1} = \Phi^{(2)} \Big|_{r=R_1}, \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_1} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (2.102)$$

$$\Phi^{(2)} \Big|_{r=R_2} = 0, \quad (2.103)$$

$$\Phi^{(3)} \Big|_{r=R_2} = 0. \quad (2.104)$$

Nejprve napíšeme řešení $\Phi^{(1)}$ pro $r \leq R_1$. Tato oblast obsahuje bod $r = 0$, a proto $B_p = 0$ pro $p = 0, 1, 2, \dots$ a z (2.99) plyne

$$\Phi^{(1)}(r, \phi) = \sum_{p=0}^{\infty} r^p [C_p^{(1)} \cos(p\phi) + D_p^{(1)} \sin(p\phi)], \quad (2.105)$$

kde $C_p^{(1)} \equiv A_p C_p$, $D_p^{(1)} \equiv A_p D_p$, $p = 1, 2, \dots$ a $C_0^{(1)} \equiv A_0$.

Řešení $\Phi^{(2)}$ pro $R_1 \leq r \leq R_2$ obsahuje všechny členy z (2.99):

$$\Phi^{(2)}(r, \phi) = \sum_{p=1}^{\infty} (A_p^{(2)} r^p + B_p^{(2)} r^{-p}) [C_p^{(2)} \cos(p\phi) + D_p^{(2)} \sin(p\phi)] + A_0^{(2)} + B_0^{(2)} \ln r \quad (2.106)$$

V oblasti $r \geq R_2$ je jediné regulární řešení, které vyhovuje okrajové podmínce (2.104):

$$\Phi^{(3)}(r, \phi) = 0. \quad (2.107)$$

Nyní užijeme okrajové podmínky. Z (2.101) vyplývá:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\infty} R_1^p [C_p^{(1)} \cos(p\phi) + D_p^{(1)} \sin(p\phi)] = \\ & = \sum_{p=1}^{\infty} (A_p^{(2)} R_1^p + B_p^{(2)} R_1^{-p}) [C_p^{(2)} \cos(p\phi) + D_p^{(2)} \sin(p\phi)] + A_0^{(2)} + B_0^{(2)} \ln R_1 \end{aligned}$$

tj.

$$R_1^p C_p^{(1)} = (A_p^{(2)} R_1^p + B_p^{(2)} R_1^{-p}) C_p^{(2)}, \quad p > 0 \quad (2.108)$$

$$R_1^p D_p^{(1)} = (A_p^{(2)} R_1^p + B_p^{(2)} R_1^{-p}) D_p^{(2)}, \quad p > 0 \quad (2.109)$$

$$C_0^{(1)} = A_0^{(2)} + B_0^{(2)} \ln R_1, \quad p = 0. \quad (2.110)$$

Z (2.103) vyplývá:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(A_p^{(2)} R_2^p + B_p^{(2)} R_2^{-p} \right) \left[C_p^{(2)} \cos(p\phi) + D_p \sin(p\phi) \right] + A_0^{(2)} + B_0^{(2)} \ln R_2 = 0$$

tj.

$$\left(A_p^{(2)} R_2^p + B_p^{(2)} R_2^{-p} \right) C_p^{(2)} = 0, \quad p > 0 \quad (2.111)$$

$$\left(A_p^{(2)} R_2^p + B_p^{(2)} R_2^{-p} \right) D_p^{(2)} = 0, \quad p > 0 \quad (2.112)$$

$$A_0^{(2)} + B_0^{(2)} \ln R_2 = 0, \quad p = 0 \quad (2.113)$$

Z (2.102) vyplývá:

$$\sum_{p=1}^{\infty} p R_1^{p-1} \left[C_p^{(1)} \cos(p\phi) + D_p^{(1)} \sin(p\phi) \right] - \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} p \left(A_p^{(2)} R_1^{p-1} - B_p^{(2)} R_1^{-p-1} \right) \left[C_p^{(2)} \cos(p\phi) + D_p^{(2)} \sin(p\phi) \right] + B_0^{(2)} R_1^{-1} \right\} = \frac{\sigma(\phi)}{\varepsilon_0}$$

tj.

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ p R_1^{-1} \left[R_1^p C_p^{(1)} - \left(A_p^{(2)} R_1^p - B_p^{(2)} R_1^{-p} \right) C_p^{(2)} \right] \cos(p\phi) + \right. \\ & \left. + p R_1^{-1} \left[R_1^p D_p^{(1)} - \left(A_p^{(2)} R_1^p - B_p^{(2)} R_1^{-p} \right) D_p^{(2)} \right] \sin(p\phi) \right\} - B_0^{(2)} R_1^{-1} = \frac{\sigma(\phi)}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Součiny $R_1^p C_p^{(1)}$ a $R_1^p D_p^{(1)}$ vyjádříme pomocí vztahů (2.108) a (2.109) a tak dostaneme

$$2 \sum_{p=1}^{\infty} p R_1^{-1} \left[B_p^{(2)} R_1^{-p} C_p^{(2)} \cos(p\phi) + B_p^{(2)} R_1^{-p} D_p^{(2)} \sin(p\phi) \right] - B_0^{(2)} R_1^{-1} = \frac{\sigma(\phi)}{\varepsilon_0}. \quad (2.114)$$

Abychom určili neznámé konstanty, rozvedeme $\sigma(\phi)$ do Fourierovy řady. Podle výsledku úlohy 2.6 dostaneme

$$\sigma(\phi) = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2} + \frac{2(\sigma_a - \sigma_b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)\phi].$$

Tento rozvoj dosadíme do (2.114) a dostaneme

$$- B_0^{(2)} R_1^{-1} = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2\varepsilon_0} \quad (2.115)$$

$$B_p^{(2)} C_p = 0, \quad p > 0 \quad (2.116)$$

$$2p R_1^{-p-1} B_p^{(2)} D_p = \frac{2(\sigma_a - \sigma_b)}{\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2k+1}, \quad p = 2k+1, \quad p > 0 \quad (2.117)$$

$$2p R_1^{-p-1} B_p^{(2)} D_p = 0, \quad p = 2k, \quad p > 0 \quad (2.118)$$

Podle (2.116) je

$$C_p^{(2)} = 0, \quad p > 0 \quad (2.119)$$

a potom podle (2.108) je také

$$C_p^{(1)} = 0, \quad p > 0 \quad (2.120)$$

Stačí určit součiny

$$E_p \equiv A_p^{(2)} D_p, \quad p > 0 \quad (2.121)$$

$$F_p \equiv B_p^{(2)} D_p, \quad p > 0 \quad (2.122)$$

V tomto označení lze vztahy (2.109), (2.112), (2.116) a (2.118) přepsat na tvar

$$R_1^p D_p^{(1)} = E_p R_1^p + F_p R_1^{-p} \quad p > 0 \quad (2.123)$$

$$E_p R_2^p + F_p R_2^{-p} = 0, \quad p > 0 \quad (2.124)$$

$$2p R_1^{-p-1} F_p = \frac{2(\sigma_a - \sigma_b)}{\pi \varepsilon_0} \frac{1}{2k+1}, \quad p = 2k+1, \quad p > 0 \quad (2.125)$$

$$2p R_1^{-p-1} F_p = 0, \quad p = 2k, \quad p > 0 \quad (2.126)$$

Odtud (všechny vztahy platí pro $p > 0$)

$$F_p = R_1^{p+1} \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\pi \varepsilon_0} \frac{1}{p^2}, \quad p = 2k+1 \quad (2.127)$$

$$F_p = 0, \quad p = 2k \quad (2.128)$$

$$E_p = -F_p R_2^{-2p} \quad (2.129)$$

$$D_p^{(1)} = F_p (R_1^{-2p} - R_2^{-2p}). \quad (2.130)$$

Nakonec použijeme postupně vztahy (2.115), (2.113), (2.110) a dostaneme

$$B_0^{(2)} = -\frac{\sigma_a + \sigma_b}{2\varepsilon_0} R_1 \quad (2.131)$$

$$A_0^{(2)} + B_0^{(2)} \ln r = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2\varepsilon_0} R_1 \ln \frac{R_2}{r} \quad (2.132)$$

$$C_0^{(1)} = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2\varepsilon_0} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (2.133)$$

Výsledek:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(r, \phi) &= \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\pi \varepsilon_0} \sum_{k=0}^{\infty} [R_1^{-2(2k+1)} - R_2^{-2(2k+1)}] \frac{R_1^{2k+2} r^{2k+1}}{(2k+1)^2} \sin [(2k+1)\phi] \\ &\quad + \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2\varepsilon_0} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}, \end{aligned} \quad (2.134)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(r, \phi) &= \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\pi \varepsilon_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_1^{2k+2}}{(2k+1)^2} [r^{-2k-1} - r^{2k+1} R_2^{-2(2k+1)}] \sin [(2k+1)\phi] \\ &\quad + \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2\varepsilon_0} R_1 \ln \frac{R_2}{r}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

$$\Phi^{(3)}(r, \phi) = 0 \quad (2.136)$$

Bezrozměrná forma výsledku (předp. $\sigma_a \neq 0$):

$$q \equiv \frac{\sigma_b}{\sigma_a}, \quad (2.137)$$

$$\rho \equiv \frac{r}{R_1}, \quad (2.138)$$

$$\frac{\Phi^{(1)}(\rho, \phi)\varepsilon_0}{\sigma_a R_1} = \frac{1-q}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-2(2k+1)} \right] \frac{\rho^{2k+1}}{(2k+1)^2} \sin[(2k+1)\phi] + \frac{1+q}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (2.139)$$

$$\frac{\Phi^{(2)}(\rho, \phi)\varepsilon_0}{\sigma_a R_1} = \frac{1-q}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left[\rho^{-2k-1} - \rho^{2k+1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-2(2k+1)} \right] \sin[(2k+1)\phi] + \frac{1+q}{2} \ln \frac{R_2}{R_1 \rho}. \quad (2.140)$$

2.6 Řešení Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích

Úloha 2.14 Vyjádřete operátor Δ ve sférických souřadnicích.

Výsledek:

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \quad (2.141)$$

Úloha 2.15 Řešte Laplaceovu rovnici pomocí separace proměnných ve sférických souřadnicích.

Řešení: Ve sférických souřadnicích (r, θ, ϕ) má Laplaceova rovnice tvar

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (2.142)$$

Pokud předpokládáme řešení ve tvaru

$$\Phi(r, \phi, z) = R(r)P(\theta)F(\phi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) F(\phi) \quad (2.143)$$

(volba funkce $R = U/r$ vyplývá z tvaru prvního členu $r\Phi$ (2.142)) obdržíme

$$PFU'' + \frac{UF}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P') + \frac{UP}{r^2 \sin^2 \theta} F'' = 0.$$

Po vynásobení $r^2 \sin^2 \theta / UPF$ dostaneme

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{U''}{U} + \frac{1}{Pr^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P') \right] + \frac{F''}{F} = 0,$$

odtud

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{U''}{U} + \frac{1}{Pr^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P') \right] = -\frac{F''}{F}.$$

Levá strana této rovnice závisí pouze na r a θ , pravá pouze na ϕ . To je možné jen tehdy, když obě strany jsou rovny stejné konstantě, kterou označme m^2 . Tedy platí

$$F'' + m^2 F = 0 \quad (2.144)$$

a

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{U''}{U} + \frac{1}{Pr^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P') \right] = m^2.$$

Poslední rovnici upravíme do tvaru

$$r^2 \frac{U''}{U} = -\frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P') + \frac{m^2}{\sin^2 \theta}.$$

Levá strana závisí pouze na r , pravá pouze na θ . To je možné opět jen tehdy, když obě strany jsou rovny konstantě. Z důvodů, které budou zřejmé později, tuto konstantu označme $l(l+1)$ a tak obdržíme

$$U'' - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0 \quad (2.145)$$

a

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P') + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0. \quad (2.146)$$

Vidíme, že namísto řešení parciální diferenciální rovnice (2.142) musíme řešit tři obyčejné diferenciální rovnice (2.144), (2.145) a (2.146).

Obecné řešení rovnice (2.144) vytvoříme pomocí lineární kombinace funkcí

$$F(\phi) = e^{\pm im\phi}. \quad (2.147)$$

Pro $m = 0$ je řešením rovnice (2.144) nejen konstanta, ale také funkce $F(\phi) = \phi$, toto řešení však většinou není fyzikálně přijatelné, protože nesplňuje často kladenou podmínku $F(\phi) = F(\phi + 2\pi)$.

Obecně je m komplexní číslo. Pokud však má (2.147) platit v plném rozsahu úhlů $0 \leq \phi \leq 2\pi$, musí splňovat zmíněnou podmínku $F(\phi) = F(\phi + 2\pi)$, a to je možné pouze pro $m = 0, 1, 2, \dots$

Řešení rovnice (2.145) má tvar r^α . Dosadíme-li tuto funkci do (2.145), dostaneme $\alpha_1 = l+1$, $\alpha_2 = -l$ (připomeňme, že rovnice (2.145) je diferenciální rovnicí druhého řádu, a proto musí existovat dvě lineárně nezávislá řešení). Tedy

$$U(r) = A_l r^{l+1} + B_l r^{-l}. \quad (2.148)$$

Pro řešení rovnice (2.146) provedme substituci $x \equiv \cos \theta$, tak dostaneme (přesvědčte se o tom)

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0. \quad (2.149)$$

(i) $m = 0$

Důležitý je případ $m = 0$, kdy jde o problémy s azimutální symetrií. Rovnice (2.149) pak zní

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1)P = 0, \quad (2.150)$$

nebo

$$(1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + l(l+1)P = 0 \quad (2.151)$$

a nazývá se *Legendreova rovnice*.

Protože $x \equiv \cos \theta$, kde $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$, je x z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Řešení, která budou omezená na tomto intervalu (včetně koncových bodů $-1, +1$), dostaneme pouze pro $l = 0, 1, 2, \dots$ (Tím je zdůvodněna volba separační konstanty $l(l+1)$.) Toto řešení je dáno *Legendrovými polynomy*,

které jsou definovány předpisem (Rodrigueův vzorec)

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (2.152)$$

Vypište explicitně tvar Legendreových polynomů pro $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ a dále dokažte, že platí

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x). \quad (2.153)$$

Legendreovy polynomy jsou významné i proto, že tvoří úplný ortogonální systém na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, tj.

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{kl}, \quad (2.154)$$

a každou funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ lze vyjádřit ve tvaru řady

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x), \quad (2.155)$$

kde

$$c_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx. \quad (2.156)$$

Často jsou při výpočtech užitečné rekurentní vztahy mezi Legendreovými polynomy. Přímočarým použitím (2.152) dostaneme

$$P'_{l+1} - P'_{l-1} - (2l+1) P_l = 0. \quad (2.157)$$

Z tohoto vztahu a rovnice (2.150) dále odvodíme

$$(l+1)P_{l+1} - (2l+1)xP_l + lP_{l-1} = 0, \quad (2.158)$$

$$P'_{l+1} - xP'_l + (l+1)P_l = 0, \quad (2.159)$$

$$(x^2 - 1)P'_l - lP_l + lP_{l-1} = 0. \quad (2.160)$$

Poznamenejme, že rovnice (2.151) je rovnice druhého řádu, a proto musí mít dvě lineárně nezávislá řešení. Druhé řešení i pro $l = 0, 1, 2, \dots$ diverguje v bodech $x = \pm 1$, a proto je fyzikálně nepřijatelné.

(ii) $m \neq 0$

Řešení rovnice (2.149) pro $m \neq 0$ lze vytvořit pomocí Legendreových polynomů (2.152). Dostaneme tak polynomy, které se nazývají *přidružené Legendreovy polynomy* a jsou definovány vztahem³

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x), \quad |m| \leq l. \quad (2.161)$$

Je nutné si všimnout, že

- řešení Laplaceovy rovnice vyjádřené pomocí vztahů (2.143), (2.147), (2.148) a (2.152) nebo (2.161) představuje velmi širokou třídu řešení. Lineární kombinace (superpozice) těchto řešení pro různá m a l je samozřejmě také řešením Laplaceovy rovnice,
- výběr konkrétního řešení provedeme pomocí okrajových podmínek (uvidíme v následujících úlohách).

³V literatuře existují i jiné definice.

Poznámka: pomocí funkcí $P_l^m(\cos \theta)$ a $e^{im\phi}$, které závisejí jen na úhlových proměnných, definujeme kulové funkce $Y_{lm}(\theta, \phi)$:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) \equiv N_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \equiv (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (2.162)$$

S kulovými funkcemi se setkáváme také v kvantové teorii orbitálního momentu hybnosti.

Úloha 2.16 Kouli o poloměru R vložíme do homogenního vnějšího pole $\vec{E}_0$. Určete výsledné pole v případě (a) uzeměné kovové, (b) dielektrické koule a (c) plošnou hustotu náboje indukovaného na kovové kouli.

Řešení: Vzhledem k symetrii úlohy použijeme sférické souřadnice, a tedy přímo využijeme výsledků příkladu 2.15. Laplaceovu rovnici budeme řešit zvlášť uvnitř a vně koule.

Osu z orientujme podle $\vec{E}_0$. Pak potenciál nemůže záviset na ϕ , tj. $F(\phi) = 1$, $m = 0$ a řešení Laplaceovy rovnice v obou oblastech má tvar

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta) \quad (2.163)$$

Konstanty A_l a B_l jsou různé uvnitř a vně koule.

Jaké jsou okrajové podmínky problému? Ze zadání vyplývá asymptotická okrajová podmínka pro intenzitu elektrického pole

$$\vec{E} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \vec{E}_0,$$

kterou lze přepsat do podmínky pro potenciál

$$\Phi \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad (2.164)$$

(ověřte pomocí $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$). Dále při řešení využijeme okrajové podmínky na povrchu koule.

Hledejme nejprve řešení *vně* koule, $r \geq R$.

Připomeňte si tvary několika nejnižších Legendreových polynomů, zejména vztah $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$. Přihlédneme-li k okrajové podmínce (2.164) a uvědomíme-li si, že funkce $P_l(\cos \theta)$ v (2.163) jsou navzájem ortogonální, dostaneme

$$\begin{aligned} A_l^{(e)} &= 0 \quad \text{pro } l = 0, 2, 3, 4, \dots \\ B_l^{(e)} &= 0 \quad \text{pro } l = 0, 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Proto

$$\Phi^{(e)}(r, \theta) = (A_1^{(e)} r + B_1^{(e)} r^{-2}) P_1(\cos \theta) = (A_1^{(e)} r + B_1^{(e)} r^{-2}) \cos \theta,$$

kde vzhledem k (2.164)

$$A_1^{(e)} = -E_0$$

a $B_1^{(e)}$ je zatím neznámá konstanta. Řešení vně koule má tedy tvar

$$\Phi^{(e)}(r, \theta) = (-E_0 r + B_1^{(e)} r^{-2}) \cos \theta, \quad r \geq R, \quad (2.165)$$

Nyní hledejme řešení *uvnitř* koule, $r \leq R$.

Vzhledem k omezenosti potenciálu v $r = 0$ musí být

$$B_l^{(i)} = 0 \quad \text{pro } l = 0, 1, 2, \dots$$

Využijeme-li spojitost potenciálu na povrchu koule $r = R$ a ortogonalitu funkcí $P_l(\cos \theta)$ v (2.163), dostaneme s přihlédnutím k (2.165)

$$\begin{aligned} A_l^{(i)} &= 0 \quad \text{pro } l = 0, 2, 3, 4 \dots \\ A_1^{(i)} R &= -E_0 R + B_1^{(e)} R^{-2}, \end{aligned} \quad (2.166)$$

a tedy řešení uvnitř koule má tvar

$$\Phi^{(i)}(r, \theta) = \left(-E_0 + B_1^{(e)} R^{-3} \right) r \cos \theta, \quad r \leq R. \quad (2.167)$$

Zbývá určit konstantu $B_1^{(e)}$. Přitom musíme předpokládat jednu z následujících možností:

(a) *Kovová koule:*

$$\Phi^{(i)}(r, \theta) = 0 \Rightarrow -E_0 + B_1^{(e)} R^{-3} = 0 \Rightarrow B_1^{(e)} = E_0 R^3.$$

Dosadíme-li tento výsledek do (2.165) dostaneme

$$\Phi^{(e)}(r, \theta) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad r \geq R, \quad (2.168)$$

kde

$$\vec{p} \equiv 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_0 = 3\epsilon_0 V \vec{E}_0 \quad (2.169)$$

je elektrický dipólový moment kovové koule (druhý člen na pravé straně (2.168) je pole elektrického dipólu $\vec{p}$) a V je její objem.

(b) *Dielektrická koule:*

Ze spojitosti normálové složky $\vec{D}$, tj. ze spojitosti $\epsilon E_r = -\epsilon \partial \Phi / \partial r$ v $r = R$ vyplývá

$$-\epsilon^{(i)} \left(-E_0 + B_1^{(e)} R^{-3} \right) = -\epsilon^{(e)} \left(-E_0 - 2B_1^{(e)} R^{-3} \right),$$

kde $\epsilon^{(i)}$ a $\epsilon^{(e)}$ je permitivita uvnitř a vně koule. Odtud dostaneme

$$B_1^{(e)} = \frac{\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(e)}}{\epsilon^{(i)} + 2\epsilon^{(e)}} E_0 R^3. \quad (2.170)$$

Dosadíme-li tento výsledek do (2.165), dostaneme opět vztah (2.168), kde nyní

$$\vec{p} \equiv 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(e)}}{\epsilon^{(i)} + 2\epsilon^{(e)}} \vec{E}_0 = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(e)}}{\epsilon^{(i)} + 2\epsilon^{(e)}} V \vec{E}_0 \quad (2.171)$$

je elektrický dipólový moment dielektrické koule. Potenciál uvnitř koule určíme dosazením do (2.167)

$$\Phi^{(i)}(r, \theta) = -\frac{3\epsilon^{(e)}}{\epsilon^{(i)} + 2\epsilon^{(e)}} E_0 r \cos \theta = -\frac{3\epsilon^{(e)}}{\epsilon^{(i)} + 2\epsilon^{(e)}} \vec{E}_0 \cdot \vec{r}, \quad r \leq R. \quad (2.172)$$

Intenzita elektrického pole v případě (a) – kovová koule je

$$\vec{E}^{(e)}(r, \theta) = \vec{e}_r \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) E_0 \cos \theta - \vec{e}_\theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) E_0 \sin \theta, \quad (2.173)$$

$$\vec{E}^{(i)}(r, \theta) = 0; \quad (2.174)$$

v případě (b) – dielektrická koule je

$$\vec{E}^{(e)}(r, \theta) = \vec{e}_r \left(1 + 2 \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} \frac{R^3}{r^3} \right) E_0 \cos \theta - \vec{e}_\phi \left(1 - \frac{\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} \frac{R^3}{r^3} \right) E_0 \sin \theta, \quad (2.175)$$

$$\vec{E}^{(i)}(r, \theta) = \vec{e}_r \frac{3\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} E_0 \cos \theta - \vec{e}_\phi \frac{3\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}} E_0 \sin \theta = \vec{E}_0 \frac{3\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}}. \quad (2.176)$$

Všimněte si, že pole uvnitř dielektrické koule je homogenní.

(c) Plošnou hustotu náboje určíme pomocí okrajové podmínky (1.5), která má nyní tvar

$$\varepsilon^{(e)} E_r^{(e)} \Big|_{r=R} = \sigma.$$

Pomocí (2.173) dostaneme

$$\sigma = 3\varepsilon^{(e)} E_0 \cos \theta. \quad (2.177)$$

Uvědomte si, která část koule je nabitá kladným resp. záporným nábojem a fyzikálně zdůvodněte. Přesvědčte se, že celkový náboj na kouli je roven nule.

Úloha 2.17 (nepovinná) Rozložte funkci

$$f(x) = \begin{cases} f_a, & 0 < x < 1, \\ f_b, & -1 < x < 0. \end{cases} \quad (2.178)$$

do řady podle Legendreových polynomů.

Řešení: Hledaná řada má tvar (2.155), kde c_l vypočteme přímo podle (2.156):

$$c_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx = \frac{2l+1}{2} \left[\int_{-1}^0 f_b P_l(x) dx + \int_0^1 f_a P_l(x) dx \right].$$

Vzhledem k (2.153) můžeme přepsat první integrál na pravé straně do tvaru

$$\int_{-1}^0 f_b P_l(x) dx = \int_{-1}^0 f_b (-1)^l P_l(-x) dx = - \int_1^0 f_b (-1)^l P_l(x) dx = \int_0^1 f_b (-1)^l P_l(x) dx,$$

a tedy

$$c_l = \frac{2l+1}{2} [f_b (-1)^l + f_a] \int_0^1 P_l(x) dx.$$

Za předpokladu $l > 0$ lze vyjádřit $P_l(x)$ pomocí rovnice (2.150) a vypočítat integrál:

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_l(x) dx &= -\frac{1}{l(l+1)} \int_0^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] dx = \frac{1}{l(l+1)} (x^2-1) P_l'(x) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{l(l+1)} P_l'(0) = \frac{1}{(l+1)} P_{l-1}(0). \end{aligned}$$

K poslední úpravě byl použit vztah (2.160). Všimněte si, že výsledek je nenulový pouze pro l liché (viz. (2.153)). Nakonec pro $l = 0$ dostaneme

$$\int_0^1 P_0(x) dx = 1.$$

Hledané koeficienty jsou tedy dány vztahy

$$c_0 = \frac{1}{2} (f_a + f_b), \quad (2.179)$$

$$c_l = \frac{2l+1}{2(l+1)} P_{l-1}(0) (f_a - f_b), \quad l = 1, 3, 5, \dots, \quad (2.180)$$

$$c_l = 0, \quad l = 2, 4, 6, \dots \quad (2.181)$$

Pro numerický výpočet je výhodné rekurentní vyjádření c_l , které dostaneme z (2.180)

$$c_{l+2} = \frac{2l+5}{2(l+3)} P_{l+1}(0) (f_a - f_b) = -\frac{2l+5}{2(l+3)} \frac{l P_{l-1}(0)}{l+1} (f_a - f_b) = -\frac{(2l+5)l}{(l+3)(2l+1)} c_l,$$

při úpravách bylo $P_{l+1}(0)$ vyjádřeno pomocí (2.158). Můžeme tedy psát

$$c_l = -\frac{(2l+1)(l-2)}{(l+1)(2l+3)} c_{l-2}, \quad l = 3, 5, 7, \dots, \quad (2.182)$$

$$c_1 = \frac{3}{4} (f_a - f_b). \quad (2.183)$$

Všimněte si analogie s úlohou 2.6.

Úloha 2.18 (nepovinná) Náboj je rozložen na povrchu koule o poloměru R s plošnou hustotou

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} \sigma_a, & 0 < \theta < \pi/2, \\ \sigma_b, & \pi/2 < \theta < \pi. \end{cases}$$

(Použity sférické souřadnice, počátek souřadnic je totožný se středem koule.) Nalezněte elektrostatický potenciál.

Řešení: Problém je invariantní vůči rotaci kolem osy z , a tedy řešení Laplaceovy rovnice nezávisí na ϕ ($m = 0$):

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

Uvnitř koule $B_l = 0$ pro $l = 0, 1, 2, \dots$, a tedy

$$\Phi^{(i)}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta). \quad (2.184)$$

Vně koule $A_l = 0$ pro $l = 0, 1, 2, \dots$, a tedy

$$\Phi^{(e)}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta). \quad (2.185)$$

Nyní musíme určit konstanty A_l a B_l . Použijeme okrajové podmínky

$$\left. \Phi^{(i)} \right|_{r=R} = \left. \Phi^{(e)} \right|_{r=R}, \quad \left. \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} \right|_{r=R} - \left. \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}.$$

Z první podmínky plyne

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l R^{-l-1} P_l(\cos \theta),$$

odkud

$$B_l = A_l R^{2l+1}. \quad (2.186)$$

Z druhé podmínky plyne

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[l A_l R^{l-1} + (l+1) B_l R^{-l-2} \right] P_l(\cos \theta) = \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0}.$$

Na levé straně použijeme (2.186); na pravé straně vyjádříme $\sigma(\theta)$ pomocí řady (2.155), koeficienty c_l byly již nalezeny v úloze 2.17,

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l R^{-l-1} P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(\cos \theta).$$

Nakonec dostaneme

$$A_l = \frac{c_l R^{l+1}}{\varepsilon_0 (2l+1)}. \quad (2.187)$$

Kapitola 3

Magnetostatické a kvazistacionární elektromagnetické pole

3.1 Magnetostatické pole

Úloha 3.1 Formulujte základní rovnice popisující magnetostatické pole.

Řešení: V ustáleném stavu je magnetické pole určeno rovnicemi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}. \quad (3.2)$$

Z první rovnice plyne, že $\vec{B}$ můžeme vyjádřit pomocí vektorového potenciálu $\vec{A}$, definovaného vztahem

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.3)$$

Vektorový potenciál není určen jednoznačně, lze k němu přičíst gradient libovolné skalární funkce. Tuto nejednoznačnost lze odstranit, pokud zadáme podmínku pro $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.

Po dosazení (3.3) do (3.2) dostaneme

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}, \quad (3.4)$$

kde

$$\nabla^2 \equiv \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times. \quad (3.5)$$

Ověřte, že v kartézských souřadnicích platí

$$\nabla^2 \vec{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z). \quad (3.6)$$

V křivočarých souřadnicích tento vztah neplatí. Např. v cylindrických souřadnicích musíme použít (A.10) a ve sférických souřadnicích (A.15).

Rovnici (3.4) zjednodušíme využitím nejednoznačnosti $\vec{A}$. Požadujeme-li splnění podmínky

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{Coulombova kalibrace}), \quad (3.7)$$

dostaneme *Poissonovu rovnici*

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}. \quad (3.8)$$

Řešení Poissonovy rovnice, pokud $\vec{J}(r)$ jde k nule dostatečně rychle pro $r \rightarrow \infty$, lze vyjádřit takto:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'. \quad (3.9)$$

Toto řešení odpovídá okrajové podmínce $\vec{A} \rightarrow 0$ pro $r \rightarrow \infty$.

V oblasti, kde $\vec{J} = 0$, přejde Poissonova rovnice v *Laplaceovu rovnici*

$$\nabla^2 \vec{A} = 0. \quad (3.10)$$

Hledáme-li její řešení v určité oblasti Ω , musíme stanovit okrajové podmínky pro $\vec{A}$ na její hranici $\partial\Omega$.

Na rozhraní dvou prostředí platí (1.6) a (1.8). Přitom z rovnice (1.6) vyplývá spojitost tečných složek $\vec{A}$

$$A_t|_1 = A_t|_2 \quad (3.11)$$

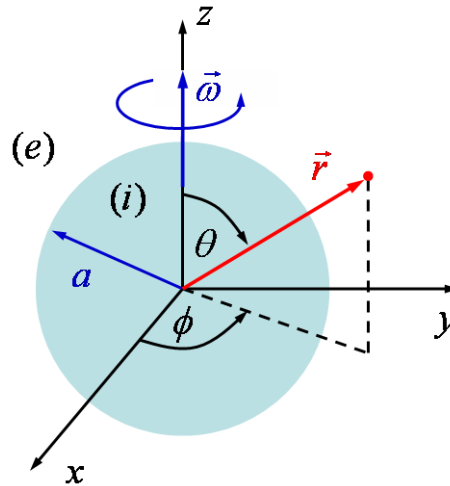
a z rovnice (1.8) vyplývá

$$\frac{1}{\mu_2} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_t|_2 - \frac{1}{\mu_1} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_t|_1 = K_t \quad (3.12)$$

Úloha 3.2 Vyjádřete vektor $\nabla^2 \vec{A}$ ve sférických souřadnicích.

Výsledek: Vztah (A.15).

Úloha 3.3 Koule o poloměru a je nabitá nábojem q rozloženým rovnoměrně po jejím povrchu. Najděte magnetické pole vytvořené touto koulí rotující kolem své osy s konstantní úhlovou rychlostí ω .



Obrázek 3.1: K úloze 3.3.

Řešení: K řešení použijeme sférické souřadnice. Vektor hustoty plošného proudu na povrchu koule je

$$\vec{K} = \sigma \vec{v} = \frac{q}{4\pi a^2} \vec{e}_\phi \omega a \sin \theta = \vec{e}_\phi \frac{q\omega}{4\pi a} \sin \theta. \quad (3.13)$$

Laplaceovu rovnici (3.10) budeme řešit zvlášť uvnitř a vně koule, a pak řešení v obou oblastech svážeme okrajovými podmínkami. Ze symetrie úlohy plyne, že vektorový potenciál $\vec{A}$ nezávisí

na úhlu ϕ a má jedinou nenulovou složku A_ϕ . V tomto předpokladu nás utvrdí i pohled na operátor (A.15). Řešení tedy budeme předpokládat ve tvaru

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = A_\phi(r, \theta) \vec{e}_\phi, \quad (3.14)$$

který vyhovuje kalibrační podmínce (3.7) (ověřte) a, jak uvidíme dále, požadovaným okrajovým podmínkám.

Po dosazení (3.14) do (3.10) a využití (A.15) dostaneme rovnici

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r A_\phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (3.15)$$

K jejímu řešení použijme metodu separace proměnné podobně jako v úloze 2.15. Pokud předpokládáme řešení ve tvaru

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{U(r)}{r} P(\theta), \quad (3.16)$$

obdržíme

$$\frac{1}{r} U'' P + \frac{1}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta U P') - \frac{U P}{r^3 \sin^2 \theta} = 0.$$

Po vynásobení $r^3/U P$ dostaneme

$$r^2 \frac{U''}{U} + \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P') - \frac{1}{\sin^2 \theta} = 0,$$

odtud

$$r^2 \frac{U''}{U} = -\frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta P') + \frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

Levá strana této rovnice závisí pouze na r , pravá pouze na θ . To je možné jen tehdy, když obě strany jsou rovny stejné konstantě, kterou označme λ . Tedy dostáváme

$$r^2 U'' - \lambda U = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta P')' + \left(\lambda - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) P = 0. \quad (3.18)$$

Namísto řešení parciální diferenciální rovnice (3.15) musíme řešit dvě obyčejné diferenciální rovnice (3.17) a (3.18). Řešení obou rovnic již známe. Rovnice (3.18) je totožná s rovnicí (2.146) pokud zvolíme $m^2 = 1$ a $l(l+1) \equiv \lambda$. Její řešení, které je omezené na intervalu $\theta \in \langle -\pi, \pi \rangle$, je dáno přidruženými Legendreovými polynomy $P_l^1(\cos \theta)$, kde $l = 1, 2, 3, \dots$. Rovnice (3.17) je totožná s rovnicí (2.145) a její řešení je dáno vztahem (2.148). Tak dostaneme řešení rovnice (3.15):

$$A_\phi(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} (C_l r^l + D_l r^{-l-1}) P_l^1(\cos \theta). \quad (3.19)$$

Zbývá určit konstanty C_l a D_l . Připomeňme, že tyto konstanty jsou různé uvnitř a vně koule. Označme řešení v jednotlivých oblastech indexy (i) a (e) :

$$A_\phi(r, \theta) = \begin{cases} A_\phi^{(i)}(r, \theta), & r \leq a, \\ A_\phi^{(e)}(r, \theta), & a \leq r. \end{cases} \quad (3.20)$$

Z požadavku, že A_ϕ musí být omezené, vyplývá, že uvnitř koule $D_l^{(i)} = 0$, zatímco vně koule $C_l^{(e)} = 0$. Tedy z (3.19) dostáváme

$$A_\phi^{(i)} = \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(i)} r^l P_l^1(\cos \theta), \quad (3.21)$$

$$A_\phi^{(e)} = \sum_{l=1}^{\infty} D_l^{(e)} r^{-l-1} P_l^1(\cos \theta). \quad (3.22)$$

Zbývající konstanty určíme pomocí okrajových podmínek na kulové ploše. Tečné složky $\vec{A}$ jsou spojité,

$$A_\phi^{(i)} \Big|_{r=a} = A_\phi^{(e)} \Big|_{r=a},$$

odtud

$$\sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(i)} a^l P_l^1(\cos \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} D_l^{(e)} a^{-l-1} P_l^1(\cos \theta).$$

Vzhledem k ortogonalitě funkcí $P_l^1(\cos \theta)$ musí platit

$$C_l^{(i)} a^l = D_l^{(e)} a^{-l-1},$$

a tedy namísto (3.22) máme

$$A_\phi^{(e)} = \sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(i)} a^{2l+1} r^{-l-1} P_l^1(\cos \theta). \quad (3.23)$$

Nakonec použijeme okrajovou podmínku (1.8). Pro řešenou úlohu má tvar

$$\vec{e}_r \times [\vec{H}^{(e)} - \vec{H}^{(i)}] = \vec{K},$$

odkud vyplývá rovnice

$$H_\theta^{(e)} - H_\theta^{(i)} = K_\phi.$$

Levou stranu upravíme pomocí vztahu (3.3), na pravé straně vyjádříme $\vec{K}$ pomocí (3.13) a dostaneme

$$\frac{1}{\mu^{(e)}} [\vec{\nabla} \times \vec{A}^{(e)}]_\theta \Big|_{r=a} - \frac{1}{\mu^{(i)}} [\vec{\nabla} \times \vec{A}^{(i)}]_\theta \Big|_{r=a} = \frac{q}{4\pi a} \omega \sin \theta \quad (3.24)$$

(srovnej s rovnicí (3.12)). Použijeme-li (A.13) pro operátor rotace ve sférických souřadnicích, dostaneme pro $\vec{A}$ ve tvaru (3.14)

$$[\vec{\nabla} \times \vec{A}^{(i,e)}]_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial [r A_\phi^{(i,e)}]}{\partial r}.$$

Potom ze vztahu (3.24) plyne

$$\frac{1}{\mu^{(i)} r} \frac{\partial [r \vec{A}^{(i)}]}{\partial r} \Big|_{r=a} - \frac{1}{\mu^{(e)} r} \frac{\partial [r \vec{A}^{(e)}]}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{q}{4\pi a} \omega \sin \theta.$$

Dosadíme sem (3.21) a (3.23):

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{l+1}{\mu^{(i)}} C_l^{(i)} a^{l-1} + \frac{l}{\mu^{(e)}} C_l^{(i)} a^{2l+1} a^{-l-2} \right] P_l^1(\cos \theta) = \frac{q}{4\pi a} \omega \sin \theta.$$

Poslední rovnici upravíme do tvaru

$$\sum_{l=1}^{\infty} C_l^{(i)} a^{l-1} \left[\frac{l+1}{\mu^{(i)}} + \frac{l}{\mu^{(e)}} \right] P_l^1(\cos \theta) = \frac{q}{4\pi a} \omega \sin \theta.$$

Na levé straně rovnice vystupují přidružené Lagrangeovy polynomy $P_l^1(\cos \theta)$. Na pravé straně rozpoznáváme, že $\sin \theta = P_1^1(\cos \theta)$. Vzhledem k ortogonalitě funkcí $P_l^1(\cos \theta)$ z poslední rovnice plyne

$$C_1^{(i)} = \frac{q\omega}{4\pi a} \frac{\mu^{(i)}\mu^{(e)}}{\mu^{(i)} + 2\mu^{(e)}} \quad (3.25)$$

a $C_l^{(i)} = 0$ pro $l > 1$.

Hledané pole je tedy dáno vztahy

$$\vec{A}^{(i)} = \vec{e}_\phi C_1^{(i)} r \sin \theta, \quad (3.26)$$

$$\vec{B}^{(i)} = \vec{e}_r 2C_1^{(i)} \cos \theta - \vec{e}_\theta 2C_1^{(i)} \sin \theta \equiv 2C_1^{(i)} \vec{e}_z, \quad (3.27)$$

$$\vec{A}^{(e)} = \vec{e}_\phi C_1^{(i)} \frac{a^3}{r^2} \sin \theta \equiv \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{m} \times \vec{r}, \quad (3.28)$$

$$\vec{B}^{(e)} = \vec{e}_r \frac{2C_1^{(i)} a^3}{r^3} \cos \theta + \vec{e}_\theta \frac{C_1^{(i)} a^3}{r^3} \sin \theta. \quad (3.29)$$

Všimněte si, že pole $\vec{B}^{(i)}$ uvnitř koule je homogenní a pole vně je totožné s polem magnetického dipólu

$$\vec{m} = \frac{qa^2}{\mu_0} \frac{\mu^{(i)}\mu^{(e)}}{\mu^{(i)} + 2\mu^{(e)}} \vec{\omega}. \quad (3.30)$$

3.2 Kvazistacionární elektromagnetické pole, skinový jev

Úloha 3.4 V kvazistatické aproximaci zanedbáme vliv Maxwellova proudu $\partial \vec{D}/\partial t$. Pak Maxwellovy rovnice v rozlehlém homogenním vodiči s vodivostí σ mají tvar

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.31)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}, \quad (3.32)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.33)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.34)$$

kde proudová hustota je dána Ohmovým zákonem

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (3.35)$$

Z těchto rovnic odvoďte rovnice, které budou obsahovat buď pouze vektor $\vec{E}$, nebo pouze vektor $\vec{B}$.

Řešení: Na rovnici (3.31) aplikujeme operaci rotace a pak použijeme rovnici (3.32)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0,$$

kde operátor ∇^2 je definován vztahem (3.5). Nakonec pomocí (3.34) a (3.35) dostaneme

$$\nabla^2 \vec{E} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0.$$

Výsledek má tvar rovnice difúze. Stejnou rovnici bychom dostali i pro $\vec{B}$ (vyjdeme z (3.32) a použijeme obdobný postup). Obě rovnice tedy můžeme zapsat takto:

$$\left(\nabla^2 - \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.36)$$

Poznámka: Protože $\text{div rot} \equiv 0$, z rovnice (3.32) vyplývá, že $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$. V kovu, kde platí Ohmův zákon, z (3.35) plyne rovnice (3.34) (v kovu v ustáleném stavu neexistují volné náboje).

Úloha 3.5 Vodič, který je popsán vodivostí σ a permeabilitou $\mu \approx \mu_0$, zaplňuje poloprostor $z > 0$. V oblasti $z < 0$ je vakuum. Magnetické pole těsně nad povrchem vodiče je

$$\vec{B}|_{z=0-} = \vec{B}_0 \cos \omega t \quad (3.37)$$

a je rovnoběžné s povrchem. Nalezněte ustálené řešení rovnice (3.36) uvnitř vodiče (pro $z > 0$).

Řešení: Nejprve formulujme okrajovou podmínku v $z = 0$. Podle zadání je $\mu \approx \mu_0$, a tedy na rozhraní jsou spojitě normálové i tečné složky $\vec{B}$, viz. podmínky (1.6) a (1.8). Hledané pole těsně pod rozhraním je tedy dáno pravou stranou (3.37). Při výpočtech je výhodné použít komplexního vyjádření, proto tuto okrajovou podmínku napíšeme ve tvaru

$$\vec{B}|_{z=0+} = \text{Re} \left\{ \vec{B}_0 \exp(-i\omega t) \right\}. \quad (3.38)$$

Vzhledem k symetrii úlohy (vodič je rozlehlý ve směru x a y) bude pole záviset pouze na z (a samozřejmě i na t). V ustáleném stavu bude mít řešení tvar:

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \text{Re} \left\{ \vec{b}(z) \exp(-i\omega t) \right\}, \quad (3.39)$$

kde $\vec{b}(z)$ je zatím neznámá komplexní funkce. Po dosazení (3.39) do (3.36) obdržíme

$$\frac{d^2 \vec{b}}{dz^2} + k^2 \vec{b} = 0, \quad (3.40)$$

kde

$$k \equiv \sqrt{i\sigma\mu\omega} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma\mu\omega} \equiv \frac{1+i}{\delta}, \quad (3.41)$$

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}. \quad (3.42)$$

Při úpravách byly použity vztahy

$$i = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right), \quad \sqrt{i} = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Obecné řešení rovnice (3.40) je

$$\vec{b}(z) = \vec{C}_1 \exp(ikz) + \vec{C}_2 \exp(-ikz) = \vec{C}_1 \exp\left(i\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) + \vec{C}_2 \exp\left(-i\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(\frac{z}{\delta}\right)$$

Aby bylo řešení omezené v $z \rightarrow \infty$, musíme položit $\vec{C}_2 = 0$. Z podmínky (3.38) vyplývá $\vec{C}_1 = \vec{B}_0$. Hledané pole je tedy

$$\vec{B}(z, t) = \text{Re} \left\{ \vec{B}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta} + i\frac{z}{\delta} - i\omega t\right) \right\} = \vec{B}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right). \quad (3.43)$$

Elektrické pole určíme pomocí rovnice (3.32) a (3.35),

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(z, t) &= \frac{1}{\sigma\mu} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sigma\mu} \vec{\nabla} \times [\vec{B}_0 \exp(ikz - i\omega t)] \right\} = \frac{\vec{e}_z \times \vec{B}_0}{\sigma\mu} \operatorname{Re} \{ ik \exp(ikz - i\omega t) \} \\
 &= \sqrt{\frac{\omega}{\sigma\mu}} \vec{e}_z \times \vec{B}_0 \operatorname{Re} \left\{ \exp \left(ikz - i\omega t + i\frac{3\pi}{4} \right) \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{\omega}{\sigma\mu}} \vec{e}_z \times \vec{B}_0 \exp \left(-\frac{z}{\delta} \right) \cos \left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \frac{3\pi}{4} \right) \\
 &= \sqrt{\frac{\omega}{\sigma\mu}} \vec{B}_0 \times \vec{e}_z \exp \left(-\frac{z}{\delta} \right) \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4} \right). \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

Nakonec z Ohmova zákona (3.35) můžeme určit proudovou hustotu

$$\vec{J}(z, t) = \sigma \vec{E}(z, t) = \sqrt{\frac{\sigma\omega}{\mu}} \vec{B}_0 \times \vec{e}_z \exp \left(-\frac{z}{\delta} \right) \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4} \right). \tag{3.45}$$

Rozložení proudové hustoty $\vec{J}$ (*Foucaultovy proudy*) uvnitř vodiče je znázorněno na obrázku 3.2. $\vec{J}$ leží v rovině rovnoběžné s rozhraním a, podobně jako $\vec{E}$ a $\vec{B}$, představuje příčnou exponenciálně tlumenou postupnou vlnu. Tzv. *skinová hloubka* δ charakterizuje hloubku průniku pole do vodiče. Pro měď při pokojové teplotě je $\sigma^{-1} = 1.68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, odkud $\delta = 6.52 \times 10^{-2} / \sqrt{\nu(\text{Hz})}$ m, kde $\nu = \omega/(2\pi)$, a tedy např. pro $\nu = 10^7$ Hz je $\delta = 0.021$ mm.

Úloha 3.6 Nalezněte pole v přímém vodiči, který má tvar válce o poloměru a a kterým protéká proud

$$I = I_0 \exp(-i\omega t) \tag{3.46}$$

(používáme komplexní symboliku a jak je zvykem nepíšeme Re) ve směru jeho osy.

Řešení: Vzhledem k symetrii problému použijme cylindrické souřadnice, přičemž osa z bude totožná s osou válce.

Z Ohmova zákona (3.35) plyne, že pole $\vec{E}$ bude mít jedinou nenulovou složku E_z . Vzhledem k válcové symetrii problému bude E_z záviset pouze na vzdálenosti r od středu vodiče. Pro předepsanou harmonickou časovou závislost pak

$$E_z = R(r) \exp(-i\omega t). \tag{3.47}$$

Tuto funkci dosadíme do rovnice (3.36) v cylindrických souřadnicích (operátor ∇^2 je dán vztahem (A.10)). Odtud dostaneme rovnici pro funkci $R(r)$

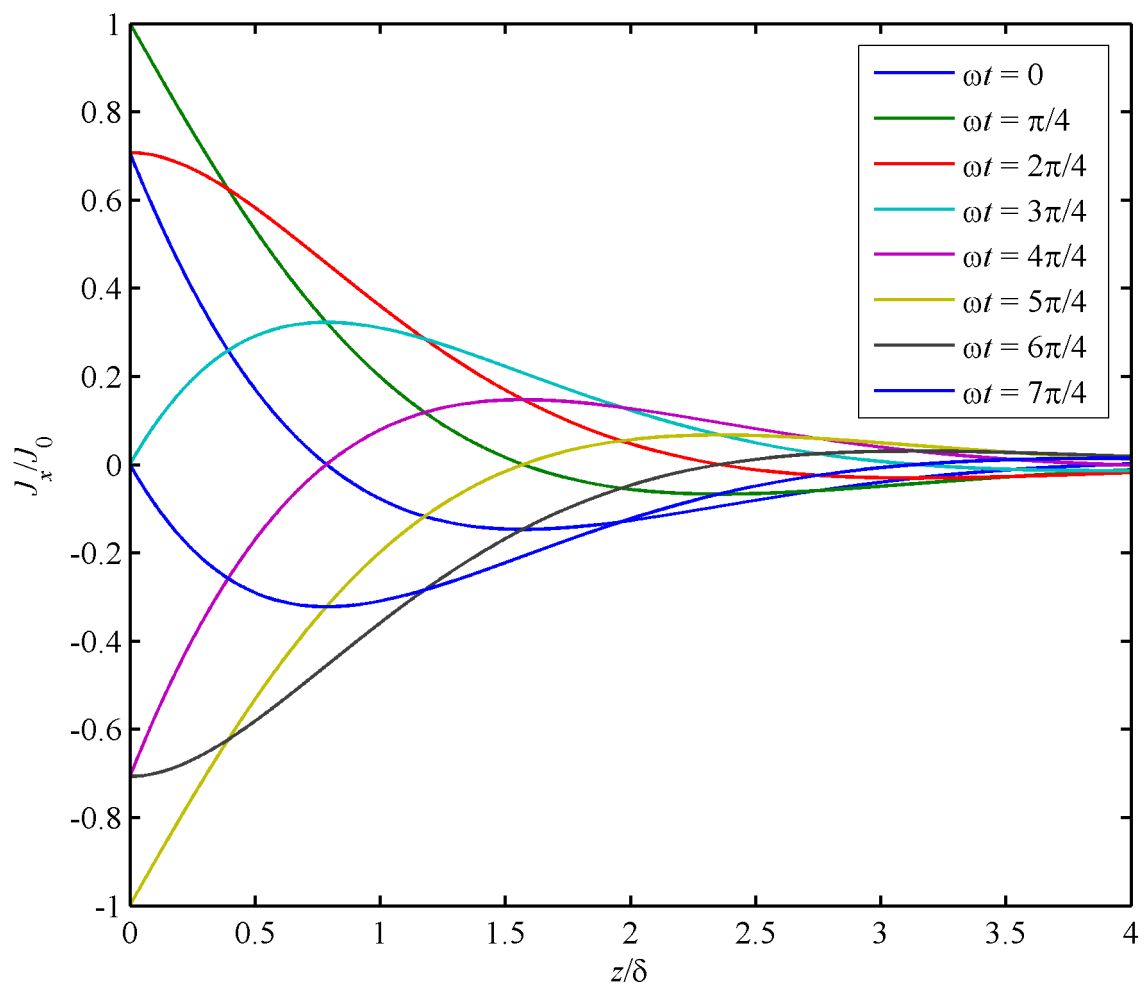
$$R'' + \frac{1}{r} R' + k^2 R = 0,$$

kde komplexní konstanta k je opět definována vztahem (3.41). Diferenciální rovnice pro R je Besselova rovnice (2.64) pro $p = 0$. Podle (2.68) tedy máme řešení

$$R = AJ_0(kr) + BN_0(kr).$$

Funkce $N_0(kr)$ (i pro komplexní k) není regulární v $r = 0$ (střed vodiče), a proto $B = 0$. Tedy

$$E_z = AJ_0(kr) \exp(-i\omega t). \tag{3.48}$$



Obrázek 3.2: Závislost normované proudové hustoty J_x/J_0 , $J_0 \equiv \sqrt{\sigma\omega/\mu}B_0$, na normované vzdálenosti z/δ v různých časech t (osa y byla zvolena ve směru vektoru $\vec{B}_0$, tak aby vektory $\vec{E}$ a $\vec{J}$ měly směr x).

Pro proudovou hustotu platí

$$J_z = \sigma E_z = \sigma A J_0(kr) \exp(-i\omega t). \quad (3.49)$$

Magnetické pole vypočteme z rovnice (3.31), kde použijeme cylindrické souřadnice:

$$i\omega \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -A \frac{\partial J_0(kr)}{\partial r} \exp(-i\omega t) \vec{e}_\phi = Ak J_1(kr) \exp(-i\omega t) \vec{e}_\phi.$$

Odtud

$$B_\phi = -\frac{iAk}{\omega} J_1(kr) \exp(-i\omega t). \quad (3.50)$$

K určení konstanty A použijeme podmínku

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int J_z dS,$$

do které dosadíme (3.46) a (3.49); odkud

$$I_0 = \int \sigma A J_0(kr) dS = \sigma A \int_0^{2\pi} \int_0^a J_0(kr) r dr d\phi = 2\pi \sigma A \int_0^a J_0(kr) r dr = \frac{2\pi \sigma A}{k^2} \int_0^{ka} J_0(s) s ds.$$

Poslední integrál snadno vypočteme pomocí vztahu (B.11), ve kterém zvolíme $\nu = 1$

$$\int_0^{ka} J_0(s) s ds = ka J_1(ka),$$

a pak již můžeme vyjádřit hledanou konstantu

$$A = \frac{k I_0}{2\pi \sigma a J_1(ka)}. \quad (3.51)$$

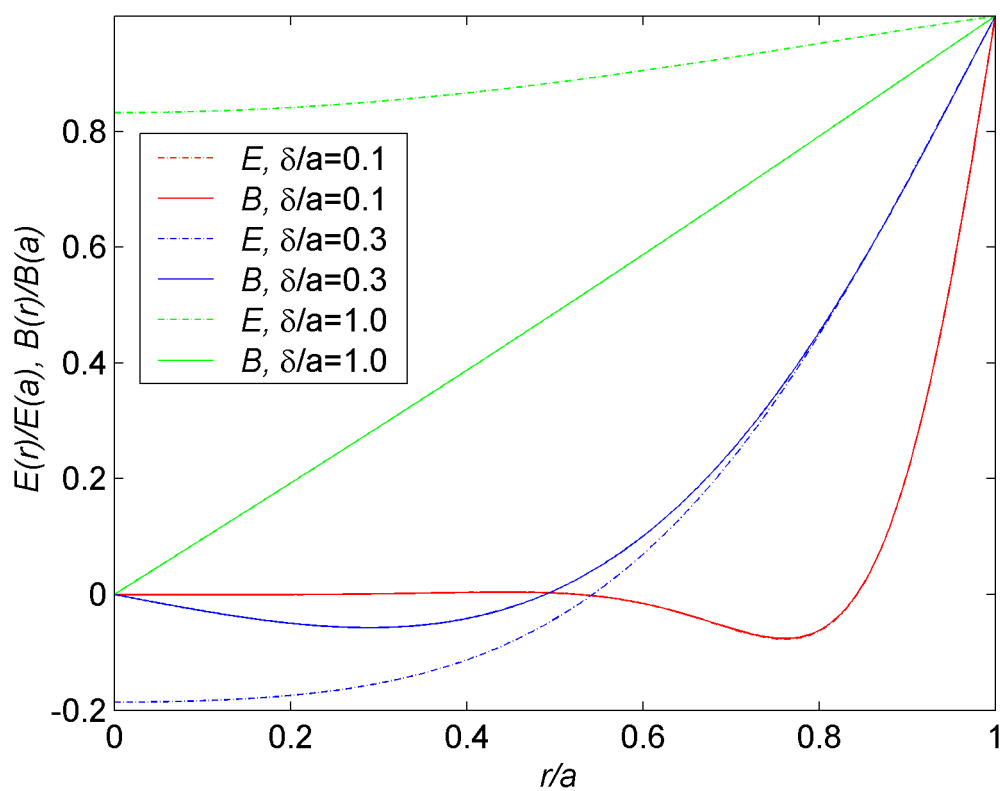
Ověřte, že stejný výsledek dostaneme, pokud určíme magnetické pole vně vodiče

$$B_\phi(r) = \frac{\mu I}{2\pi r}, \quad r \geq a, \quad (3.52)$$

(známá aplikace Ampérova zákona v integrálním tvaru, viz. HRW odst. 30.3) a pak použijeme okrajové podmínky na rozhraní $r = a$.

Použijte vztah (3.50) k výpočtu pole stacionárním proudem, tj. vypočítejte B_ϕ pro $\omega \rightarrow 0$. Výsledek porovnejte se vztahem (30.22) v HRW.

Rozložení polí uvnitř vodiče je znázorněno na obrázku 3.3. Poznamenejme, že v tomto případě, bylo nutné vyčíslit Besselovy funkce komplexního argumentu.



Obrázek 3.3: k úloze 3.6. Závislost normovaných polí $E_z(r)/E_z(a)$ a $B_\phi(r)/B_\phi(a)$ na normované vzdálenosti od osy válcového vodiče r/a pro různé hodnoty parameteru δ .

Kapitola 4

Elektromagnetické vlny

4.1 Elektromagnetické vlny ve vakuu

Úloha 4.1 V oblastech vakua bez volných nábojů a proudů mají Maxwellovy rovnice tvar

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.4)$$

Jedná se o vázané parciální diferenciální rovnice (4.1) a (4.2) doplněné podmínkami (4.3) a (4.4). Odstraňte vazbu mezi rovnicemi (4.1) a (4.2).

Řešení: Na rovnice (4.1) a (4.2) aplikujeme operaci rotace a dostaneme

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} \equiv \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} \equiv \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Operátor ∇^2 je definován vztahem (3.5). Přihlédneme-li k rovnicím (4.3) a (4.4), dostaneme *vlnovou rovnici*

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0. \quad (4.5)$$

Úloha 4.2 Hledejme řešení rovnice (4.5) v kartézských souřadnicích. Pak, vzhledem ke vztahu (3.6), každá kartézská složka vektorů $\vec{E}$ a $\vec{B}$ vyhovuje skalární vlnové rovnici

$$\left(\Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = 0. \quad (4.6)$$

(Toto tvrzení *neplatí* v křivočarých souřadnicích.) Ukažte, že řešení skalární vlnové rovnice má tvar postupných vln

$$f(\vec{r}, t) = g(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt), \quad (4.7)$$

$$f(\vec{r}, t) = h(\vec{n} \cdot \vec{r} + vt), \quad (4.8)$$

šířících se rychlostí

$$v = c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (4.9)$$

ve směru a proti směru jednotkového vektoru $\vec{n}$.

Řešení: Uvažujme např. funkci (4.7), označme $u \equiv \vec{n} \cdot \vec{r} - vt$ a počítejme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} n_x, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial u} (-v), \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial u} n_x \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} n_x^2, \quad \dots, \quad \frac{\partial f^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial g}{\partial u} (-v) \right] = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} v^2. \end{aligned}$$

Po dosazení do (4.6) dostaneme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} v^2 \equiv \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} v^2 = 0.$$

Poslední rovnice je splněna, pokud platí (4.9). Všimněte si, že $g(u)$ a $h(u)$ jsou libovolné dvakrát diferencovatelné funkce.

Úloha 4.3 Ukažte, že *stojatá vlna* $f(z, t) = A \sin(kz) \cos(kvt)$ je řešením vlnové rovnice (4.6) a vyjádřete ji jako součet dvou vln šířících se ve směru a proti směru osy z .

Úloha 4.4 (a) Ukažte, že řešením vlnové rovnice (4.5) je monochromatická rovinná vlna

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_e) \equiv \text{Re} \left[\vec{\mathcal{E}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t) \right], \quad (4.10)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_m \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_b) \equiv \text{Re} \left[\vec{\mathcal{B}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t) \right]. \quad (4.11)$$

(b) Každé řešení Maxwellových rovnic je řešením vlnové rovnice (4.5). Opačné tvrzení neplatí. Jaké podmínky musí splňovat (4.10) a (4.11), aby byly řešením Maxwellových rovnic? (c) Nakreslete vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$ a $\vec{k}$.

Řešení: (a) Jednoduchou úpravou výrazu

$$i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t = ik \left(\vec{n} \cdot \vec{r} - \frac{\omega}{k} t \right)$$

zjistíme, že (4.10) a (4.11) mají tvar (4.7), pokud platí

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (4.12)$$

a

$$\vec{k} = k\vec{n}. \quad (4.13)$$

(b) Po dosazení (4.10) a (4.11) do (4.1)–(4.4) dostaneme

$$i\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = i\omega \vec{\mathcal{B}}, \quad i\vec{k} \times \vec{\mathcal{B}} = -i\omega \varepsilon_0 \mu_0 \vec{\mathcal{E}}, \quad i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0, \quad i\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0.$$

Všechny tyto rovnice budou splněny, pokud

$$\vec{k} \perp \vec{\mathcal{E}} \quad \text{a} \quad \vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = \omega \vec{\mathcal{B}}. \quad (4.14)$$

4.2 Elektromagnetické vlny v látkovém prostředí

Úloha 4.5 Předpokládejme homogenní nevodivé prostředí bez volných nábojů a proudů, harmonickou časovou závislost polí $\sim \exp(-i\omega t)$ (používáme komplexní symboliku) a materiálové vztahy

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (4.15)$$

(a) Ukažte, že Maxwellovy rovnice přejdou do tvaru

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}, \quad (4.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\varepsilon\mu\omega \vec{E}, \quad (4.17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (4.18)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.19)$$

(b) Jedná se o vázané parciální diferenciální rovnice (4.16) a (4.17) doplněné podmínkami (4.18) a (4.19). Odstraňte vazbu mezi rovnicemi (4.16) a (4.17).

Řešení: (a) Předpokládanou časovou závislost polí můžeme zapsat vztahy

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} [\vec{E}_{\text{cx}}(\vec{r}, t)], \quad \text{kde } \vec{E}_{\text{cx}}(\vec{r}, t) \equiv \vec{E}_\omega(\vec{r}) \exp(-i\omega t), \quad (4.20)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re} [\vec{B}_{\text{cx}}(\vec{r}, t)], \quad \text{kde } \vec{B}_{\text{cx}}(\vec{r}, t) \equiv \vec{B}_\omega(\vec{r}) \exp(-i\omega t). \quad (4.21)$$

Po dosazení do (1.1)–(1.4) a použití materiálových vztahů dostaneme hledané rovnice. Všiměte si, že tyto rovnice platí jak pro komplexní funkce $\vec{E}_\omega(\vec{r})$ a $\vec{B}_\omega(\vec{r})$, tak pro komplexní funkce $\vec{E}_{\text{cx}}(\vec{r}, t)$ a $\vec{B}_{\text{cx}}(\vec{r}, t)$. V dalším textu použijeme běžnou konvenci: ve vztazích typu (4.20) a (4.21) nebudeme psát $\text{Re}[\dots]$ a také vynecháme index cx.

(b) Stejným postupem jako při odvození rovnice (4.5) dostaneme *Helmholtzovu rovnici*

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0, \quad (4.22)$$

kde

$$k^2 \equiv \mu\varepsilon\omega^2. \quad (4.23)$$

Úloha 4.6 Ukažte, že monochromatická rovinná vlna (4.10) a (4.11) je řešením Helmholtzovy rovnice (4.22) a Maxwellových rovnic v látkovém prostředí (4.16)–(4.19). Platí znovu vztahy (4.12), (4.13) a (4.14)?

Řešení: Aby (4.10) a (4.11) vyhovovaly rovnici (4.22), musí být velikost vlnového vektoru $\vec{k}$ dána vztahem (4.23). Vztah (4.12) tedy platí, avšak namísto (4.9) musíme použít vztah

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (4.24)$$

Ostatní zmíněné vztahy zůstávají v platnosti.

Úloha 4.7 Obecně jsou veličniny ε a μ komplexními funkcemi frekvence ω . Zdůvodněte, proč v tomto případě *nejdou* postupné vlny (4.7) a (4.8) řešením Helmholtzovy rovnice.

Úloha 4.8 Řešte Helmholtzovu rovnici pomocí metody separace proměnné v kartézských souřadnicích.

Řešení: Z rovnice (4.22) vyplývá, že libovolná kartézská složka vektorů $\vec{E}$ nebo $\vec{B}$ vyhovuje rovnici

$$(\Delta + k^2) F = 0. \quad (4.25)$$

Poslední rovnici vyřešíme podobným postupem jako v úloze 2.7. Předpokládáme

$$F(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (4.26)$$

Po dosazení do (4.25) dostaneme

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -k^2.$$

Každý člen na levé straně závisí pouze na jedné proměnné a součet těchto členů je roven konstantě. Celá rovnice musí platit pro všechna x, y, z . Tyto podmínky je možné splnit jenom tehdy, když každý z členů bude konstantní

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k_y^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -k_z^2, \quad (4.27)$$

přičemž separační konstanty splňují podmínku

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \equiv \mu\epsilon\omega^2. \quad (4.28)$$

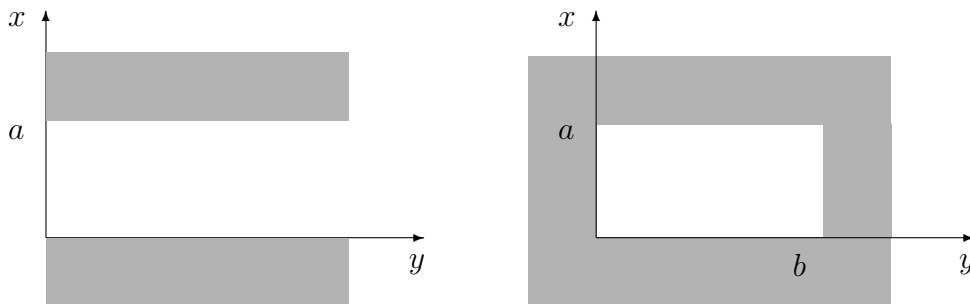
Vidíme, že namísto řešení parciální diferenciální rovnice (4.25) musíme řešit tři obyčejné diferenciální rovnice (4.27), jejichž obecná řešení vytvoříme pomocí funkcí

$$\exp(\pm ik_x x), \quad \exp(\pm ik_y y), \quad \exp(\pm ik_z z).$$

Úloha 4.9 Porovnejte výsledky úloh 4.6 a 4.8.

4.3 Vlnovody a rezonátory

Úloha 4.10 Planární zrcadlový *vlnovod* je tvořen dvěma rovnoběžnými nekonečně rozlehlými rovinovými stěnami, jejichž vzdálenost je a (obr. 4.1 vlevo). Prostředí v dutině vlnovodu je charakterizováno konstantami ϵ a μ . Stěny jsou z dokonale vodivého materiálu (kovu). Vy-



Obrázek 4.1: Znázornění průřezu dutiny planárního (vlevo) a pravoúhlého (vpravo) vlnovodu. Průřez dutiny vlnovodu se *nemění* podél osy z (tzv. osy vlnovodu).

šetřete šíření vln ve vlnovodu. Tip: Předpokládejte, že výsledné pole vznikne superpozicí dvou

rovinných vln, šířících se v rovině (x, z) a uvažujte dvě možnosti (a) $\vec{E} \parallel y$, (b) $\vec{B} \parallel y$.

Řešení: Hledáme řešení Maxwellových rovnic v oblasti $0 \leq x \leq a$, které splňuje okrajové podmínky problému. Uvnitř dokonale vodivého materiálu je $\vec{E} = 0$ a $\vec{B} = 0$. Z podmínek na rozhraní (1.6) a (1.7) tedy vyplývá, že na okrajích dutiny (na rozhraních mezi dutinou a dokonale vodivým materiálem) jsou nulové tečné složky elektrického pole a normálové složky magnetického pole:

$$\vec{E}_{\parallel} \Big|_{\text{okraj}} = 0, \quad (4.29)$$

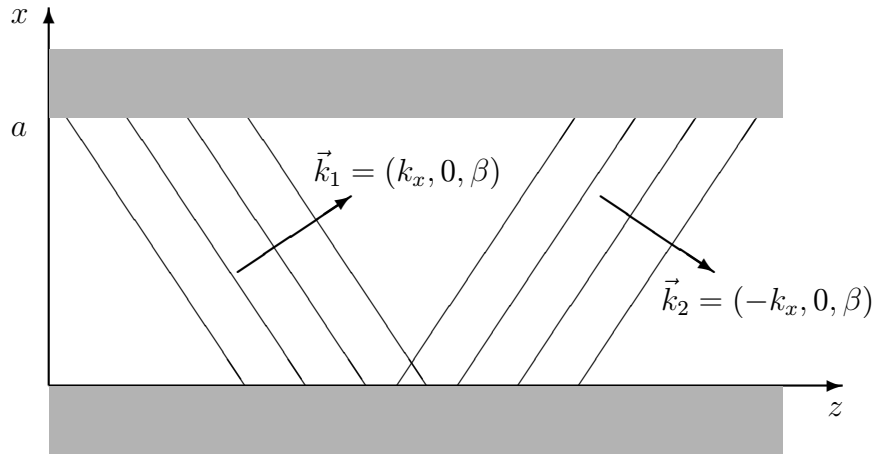
$$\vec{B}_{\perp} \Big|_{\text{okraj}} = 0. \quad (4.30)$$

(a) Řešení vyjádříme jako součet dvou harmonických rovinných vln

$$E_y = [\mathcal{E}_{1y} \exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \mathcal{E}_{2y} \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r})] \exp(-i\omega t). \quad (4.31)$$

Další postup porovnejte s obr. 4.2. Podle zadání leží vlnové vektory v rovině (x, z) , tj. $k_{1y} = k_{2y} = 0$. Dále si připomeňme, že velikosti obou vektorů musí být stejné

$$k_1 = k_2 = k = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (4.32)$$



Obrázek 4.2: Vlnoplochy a vlnové vektory rovinných vln jejichž součtem vznikne tzv. *mod vlnovodu*, tj. řešení Maxwellových rovnic, které splňuje všechny okrajové podmínky problému (na rozdíl od obr. 4.1 je vodorovně vynesena osa z).

Nyní použijeme okrajové podmínky (4.29). Okrajová podmínka

$$E_y|_{x=0+} = 0$$

vede k rovnici

$$\mathcal{E}_{1y} \exp(ik_{1z}z) + \mathcal{E}_{2y} \exp(ik_{2z}z) = 0,$$

která musí být splněna pro libovolné z . Její řešení je tedy

$$\mathcal{E}_{1y} = -\mathcal{E}_{2y} \equiv \mathcal{E}, \quad k_{1z} = k_{2z} \equiv \beta.$$

Vlnové vektory obou vln tedy mají *stejnou* složku ve směru osy z . Protože velikosti obou vlnových vektorů jsou stejné (4.32), musí platit $k_{1x} = \pm k_{2x}$. Znaménko $+$ však musíme vyloučit,

protože by v tomto případě platilo $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ a součet obou vln (4.31) by byl roven nule. Odtud vyplývá $k_{1x} = -k_{2x} \equiv k_x$. Pro oba vlnové vektory tedy platí $\vec{k}_1 = (k_x, 0, \beta)$ a $\vec{k}_2 = (-k_x, 0, \beta)$.

Okrajová podmínka

$$E_y|_{x=a-} = 0$$

vede k rovnici

$$\mathcal{E} \exp(i\beta z + ik_x a) - \mathcal{E} \exp(i\beta z - ik_x a) = 0,$$

odkud vyplývá

$$\exp(i2k_x a) = 1,$$

a tedy

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.33)$$

Lineárně nezávislá řešení tedy jsou

$$\vec{E}_m = \vec{e}_y A_m \exp(i\beta_m z - i\omega t) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.34)$$

kde A_m je libovolná (komplexní) konstanta a β_m je vzhledem k podmínce (4.32) dáno vztahem

$$\beta_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}, \quad (4.35)$$

Sami ukažte, že stejná řešení lze ještě snadněji obdržet, aplikujeme-li dané okrajové podmínky na výsledek úlohy 4.8.

(b) Výsledné pole opět předpokládáme ve tvaru součtu dvou vln

$$B_y = [\mathcal{B}_{1y} \exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \mathcal{B}_{2y} \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r})] \exp(-i\omega t).$$

Protože vektor $\vec{B}$ je tečný k rozhraní, podmínku (4.30) nelze použít. Abychom mohli použít okrajovou podmínku (4.29), vypočteme E_z pomocí (4.17)

$$-i\varepsilon\mu\omega E_z = [ik_{1x}\mathcal{B}_{1y} \exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + ik_{2x}\mathcal{B}_{2y} \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r})] \exp(-i\omega t).$$

Okrajová podmínka

$$E_z|_{x=0+} = 0$$

vede k rovnici

$$k_{1x}\mathcal{B}_{1y} \exp(ik_{1z}z) + k_{2x}\mathcal{B}_{2y} \exp(ik_{2z}z) = 0. \quad (4.36)$$

Tato rovnice musí platit pro libovolné z . Odtud, stejně jako v případě (a), vyplývají vztahy pro vlnové vektory obou vln $\vec{k}_1 = (k_x, 0, \beta)$ a $\vec{k}_2 = (-k_x, 0, \beta)$. Dosadíme-li tyto výrazy do (4.36) dostaneme

$$\mathcal{B}_{1y} = \mathcal{B}_{2y} \equiv \mathcal{B}.$$

Okrajová podmínka

$$E_z|_{x=a-} = 0$$

vede k rovnici

$$k_x \mathcal{B} \exp(i\beta z + ik_x a) - k_x \mathcal{B} \exp(i\beta z - ik_x a) = 0.$$

odkud opět vyplývá podmínka (4.33).

Lineárně nezávislá řešení tedy jsou

$$\vec{B}_m = \vec{e}_y A_m \exp(i\beta_m z - i\omega t) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.37)$$

kde A_m je libovolná (komplexní) konstanta a β_m je opět dáno vztahem (4.35).

Sami ukažte, že stejná řešení lze ještě snadněji obdržet, aplikujeme-li dané okrajové podmínky na výsledek úlohy 4.8.

Řešení (4.34) a (4.37) se označují jako TE_m resp. TM_m *mody vlnovodu*. Každý mod je vytvořen součtem dvou rovinných vln (obr. 4.2) a představuje stojatou vlnou ve směru osy x (srovnejte s úlohou 4.3). Průmět vlnových vektorů obou vln do osy vlnovodu (osy z) β_m se nazývá *konstanta šíření* a je dán vztahem (4.35) (vztah je stejný pro TE i TM mody, analogické tvrzení však neplatí v případě složitějších vlnovodů).

Všimněte si, že β_m je reálné, pokud platí

$$\omega \geq \frac{vm\pi}{a} \equiv \omega_m, \quad (4.38)$$

a že v tomto případě příslušný (m -tý) mod představuje postupnou vlnu, šířící se ve směru osy vlnovodu. Pro β_m imaginární, tj. pokud je $\omega < \omega_m$, pole modu podél z exponenciálně klesá, a tedy takovéto mody se nemohou šířit neomezeně podél vlnovodu (tyto mody se nazývají evanescentní). Proto se ω_m nazývá *mezní frekvence* (m -tého modu).

V případě (a) je vektor $\vec{E}$ kolmý na směr šíření modu (odtud název TE) a vektor $\vec{B}$ leží v rovině (x, z) (napište jeho složky). V případě (b) je vektor $\vec{B}$ kolmý na směr šíření modu (odtud název TM) a vektor $\vec{E}$ leží v rovině (x, z) (napište jeho složky).

Fázová rychlost modu je

$$v_{fm} = \frac{\omega}{\beta_m} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\omega_m/\omega)^2}}, \quad (4.39)$$

což je větší než v a tedy ve vakuu větší než c . Energie nesesná modem se však šíří grupovou rychlostí

$$v_{gm} = \frac{d\omega}{d\beta_m} = v\sqrt{1 - (\omega_m/\omega)^2} < v. \quad (4.40)$$

Úloha 4.11 Nalezněte mody *pravoúhlého vlnovodu*. Průřez dutiny vlnovodu má tvar obdélníku o stranách a a b (obr. 4.1 vpravo). Stěny vlnovodu jsou z dokonale vodivého materiálu.

Řešení: Hledáme řešení rovnice (4.22) splňující všechny okrajové podmínky problému, tj. splňující podmínky (4.29) a (4.30). Použijeme výsledky úlohy 4.8.

Uvažujme např. složku E_z , která je nulová na všech okrajích dutiny vlnovodu. Řešení splňující tyto okrajové podmínky má tvar

$$E_z = A_z \sin(k_x x) \sin(k_y y) \exp(i\beta z - i\omega t),$$

kde

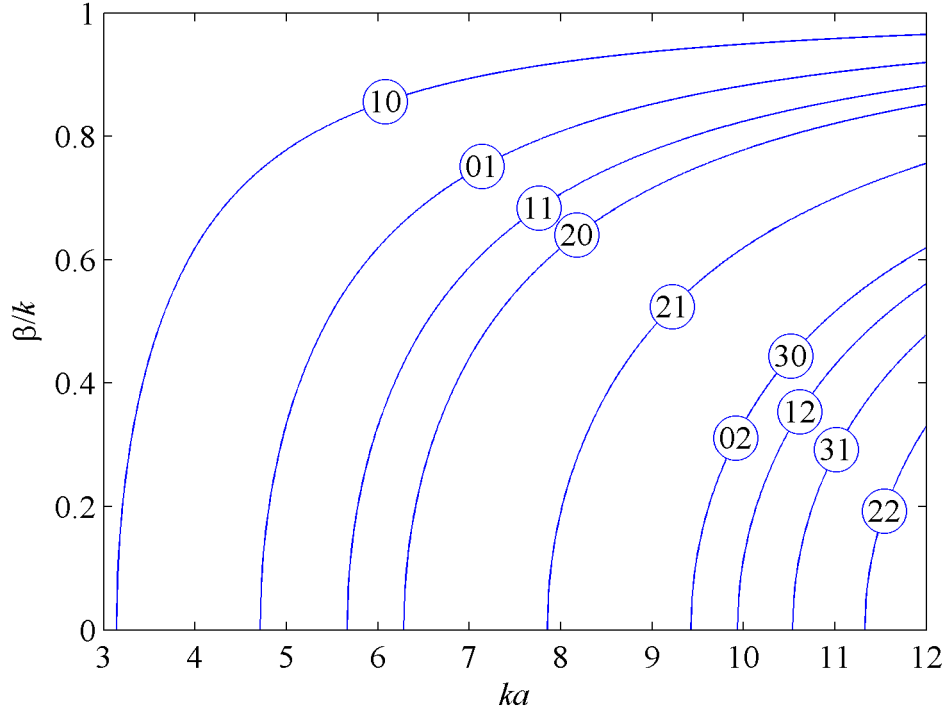
$$k_x a = m\pi, \quad k_y b = n\pi, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Konstantu šíření $\beta_{mn} \equiv k_z$ určíme pomocí vztahu (4.28):

$$\beta_{mn} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]}. \quad (4.41)$$

Všimněte si, že β_{mn} je reálné, pokud platí

$$\omega \geq v\pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \equiv \omega_{mn}, \quad (4.42)$$



Obrázek 4.3: K úloze 4.11. Závislost normované konstanty šíření β_{mn}/k na normované frekvenci $ka = \omega a/v$, indexy m, n jsou uvedeny u každé křivky. Při výpočtu bylo zvoleno $a/b = 1,5$.

kde ω_{mn} označuje mezní frekvenci. Závislosti (4.41) pro několik nejnižších modů a frekvence splňující podmínku (4.42) jsou ukázány na obrázku 4.3.

Nyní určíme zbývající složky vektorů pole. Podle výsledků úlohy 4.8 a využitím okrajových podmínek dostaneme

$$E_x = X(x) \sin(k_y y) \exp(i\beta z - i\omega t), \quad E_y = \sin(k_x x) Y(y) \exp(i\beta z - i\omega t),$$

kde $X(x)$ je zatím neznámá lineární kombinace funkcí $\sin(k_x x)$ a $\cos(k_x x)$ a $Y(y)$ je zatím neznámá lineární kombinace funkcí $\sin(k_y y)$ a $\cos(k_y y)$. K určení těchto funkcí použijeme podmínku (4.18) odkud vyplývá

$$\frac{dX}{dx} \sin(k_y y) + \sin(k_x x) \frac{dY}{dy} + i\beta A_z \sin(k_x x) \sin(k_y y) = 0. \quad (4.43)$$

Tato rovnice musí být splněna pro libovolné x a y . Zvolíme-li např. $x = 0$, dostaneme

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0,$$

což je možné pouze když $dX/dx \propto \sin(k_x x)$. Odtud $X = A_x \cos(k_x x)$. Obdobným způsobem (volba $y = 0$) určíme $Y = A_y \cos(k_y y)$.

Konstanty A nejsou nezávislé; dosadíme-li nalezené funkce X a Y do rovnice (4.43) dostaneme podmínku

$$A_x \frac{m\pi}{a} + A_y \frac{n\pi}{b} - iA_z \beta_{mn} = 0. \quad (4.44)$$

Elektrické pole lze tedy vyjádřit vztahy

$$\vec{E}_{mn}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} A_x \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ A_y \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ A_z \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{pmatrix} \exp(i\beta_{mn}z - i\omega t). \quad (4.45)$$

Magnetické pole vypočteme pomocí (4.16)

$$i\omega \vec{B}_{mn}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \left(\frac{n\pi}{b}A_z - i\beta_{mn}A_y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ \left(i\beta_{mn}A_x - \frac{m\pi}{a}A_z\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ \left(\frac{m\pi}{a}A_y - \frac{n\pi}{b}A_x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{pmatrix} \exp(i\beta_{mn}z - i\omega t). \quad (4.46)$$

Všimněte si těchto skutečností: Jednotlivá lineárně nezávislá řešení Maxwellových rovnic (tj. mody) lze klasifikovat pomocí dvou nezáporných celých čísel m, n . Abychom obdrželi netriviální řešení (nenulové pole), musí být alespoň jedno z těchto čísel nenulové. Konstanta šíření modu je dána vztahem (4.41). Příslušná rozložení polí jsou dána vztahy (4.45) a (4.46), které vzhledem k podmínce (4.44) obsahují dvě nezávislé konstanty, např. A_x a A_y , tj. každý mod je dvojnásobně degenerován. Mody představují stojaté vlny v příčném směru a (pro reálné β) postupné vlny v podélném směru.

Pro ilustraci je na obr. 4.4 vykresleno příčné rozložení složky E_x (tj. $E_x(x, y, z, t)$ pro určité z a t) pro několik nejnižších modů.

Úloha 4.12 Modem vlnovodu (umístěného podél osy z) nazýváme řešení Maxwellových rovnic ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}(x, y, z, t) \\ \vec{B}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{E}_\nu(x, y) \\ \vec{B}_\nu(x, y) \end{Bmatrix} \exp(i\beta_\nu z - i\omega t). \quad (4.47)$$

Řešení lišící se multiplikativní konstantou považujeme za stejný mod. Index (či množina indexů) ν rozlišuje jednotlivé mody. (V případě degenerace odpovídá určitému β_ν více možných rozložení $\vec{E}_\nu(x, y)$ a $\vec{B}_\nu(x, y)$, tuto situaci bychom mohli popsat použitím dalšího indexu, který je zde pro jednoduchost vynechán.) Pomocí výsledků úloh 4.10 a 4.11 ověřte vhodnost této definice.

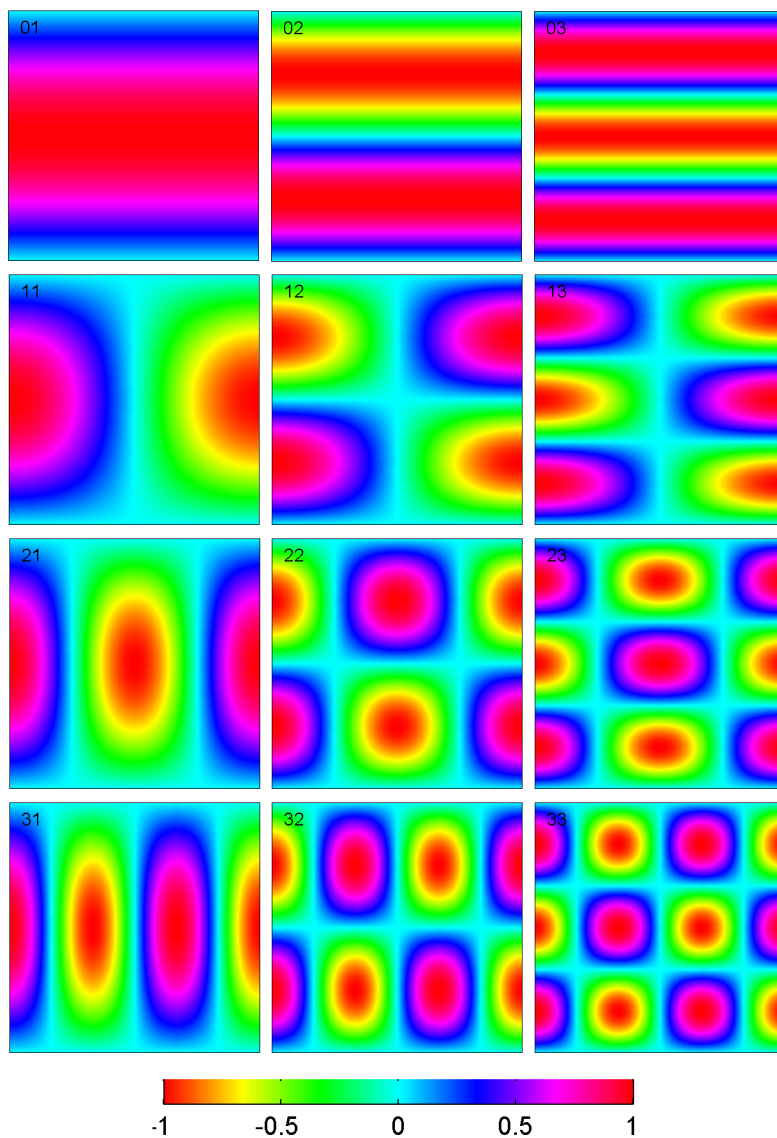
Úloha 4.13 V úlohách 4.10 a 4.11 jsme mlčky předpokládali, že se mody vlnovodu šíří ve směru $+z$. (a) Jak se změní řešení těchto úloh, budeme-li předpokládat šíření modů ve směru $-z$? (b) Ověřte platnost tvrzení: Ke každému modu označenému indexem ν a popsanému vztahem (4.47) existuje mod, který označíme indexem μ , pro který platí

$$\beta_\mu = -\beta_\nu \quad (4.48)$$

a

$$E_{\nu x}(x, y) = E_{\mu x}(x, y), \quad E_{\nu y}(x, y) = E_{\mu y}(x, y), \quad E_{\nu z}(x, y) = -E_{\mu z}(x, y), \quad (4.49)$$

$$B_{\nu x}(x, y) = -B_{\mu x}(x, y), \quad B_{\nu y}(x, y) = -B_{\mu y}(x, y), \quad B_{\nu z}(x, y) = B_{\mu z}(x, y). \quad (4.50)$$



Obrázek 4.4: K úloze 4.11. Znázornění složky pole E_x v průřezu vlnovodu pro několik různých modů. Indexy m, n , jsou uvedeny v levém horním rohu každého obrázku. Na vodorovné ose je vynesena normovaná souřadnice x/a , na svislé ose je vynesena normovaná souřadnice y/b .

Poznamenejme, že toto tvrzení platí pro libovolný vlnovod. (c) Jsou mody ν a μ lineárně nezávislé?

Řešení: (a) Předpokládaný směr šíření modů je skryt ve volbě znaménka odmocniny (4.35) nebo (4.41). Zde tedy zvolíme znaménko $-$. Vztahy popisující rozložení pole se nezmění.

(b) Platnost (4.48) vyplývá z výsledků úkolu (a). Vztahy (4.49) a (4.50) ověříme pomocí (4.45), (4.46) a (4.44), kam namísto $\beta_{mn} \equiv \beta_\nu$ dosadíme $-\beta_{mn} \equiv -\beta_\nu = \beta_\mu$. Podobně ověříme toto tvrzení pomocí výsledků úlohy 4.10 (Je vhodné si uvědomit, že konstanta A_m je libovolná, takže při záměně $\beta_m \rightarrow -\beta_m$ pro TM mody můžeme změnit její znaménko.)

(c) Ano.

Úloha 4.14 Nalezněte vlastní kmity elektromagnetického rezonátoru, jenž má tvar kvádru o stranách a , b a c . Stěny nechť jsou z dokonale vodivého materiálu.

Řešení: Hledáme řešení rovnice (4.22) splňující všechny okrajové podmínky problému, tj. splňující podmínky (4.29) a (4.30). Vidíme, že se jedná o stejné zadání jako v úloze 4.11, přidáme-li navíc okrajové podmínky

$$E_x|_{z=0+} = E_y|_{z=0+} = 0, \quad E_x|_{z=c-} = E_y|_{z=c-} = 0.$$

Abychom splnili všechny okrajové podmínky, vyjádříme řešení jako superpozici modů obdélníkového vlnovodu (byly vypočteny v úloze 4.11). Snadno lze zjistit, že stačí uvažovat pouze dva odpovídající si mody, které se šíří ve směrech $\pm z$, mezi kterými platí vztahy popsané v úloze 4.13 (srovnejte také s úlohou 4.3). Výsledné pole má tvar

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}(x, y, z, t) \\ \vec{B}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{E}_\nu(x, y) \\ \vec{B}_\nu(x, y) \end{Bmatrix} \exp(i\beta_\nu z - i\omega t) - \begin{Bmatrix} \vec{E}_\mu(x, y) \\ \vec{B}_\mu(x, y) \end{Bmatrix} \exp(i\beta_\mu z - i\omega t).$$

Skutečně, např. pro E_x máme

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z, t) &= E_{\nu x}(x, y) \exp(i\beta_\nu z - i\omega t) - E_{\mu x}(x, y) \exp(i\beta_\mu z - i\omega t) \\ &= E_{\nu x}(x, y) \exp(i\beta_\nu z - i\omega t) - E_{\nu x}(x, y) \exp(-i\beta_\nu z - i\omega t) \\ &= 2iE_{\nu x}(x, y) \sin(\beta_\nu z) \exp(-i\omega t). \end{aligned}$$

Vrátíme-li se k označení podle (4.45) je

$$E_x(x, y, z, t) = 2iA_x \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\beta_{mn}z) \exp(-i\omega t).$$

Okrajové podmínky budou splněny pokud $\beta_{mn}c = p\pi$, kde $p = 0, 1, 2, \dots$. Odtud a použitím (4.28) kde $k_z = \pm\beta_{mn}$ dostaneme

$$\omega = \pi v \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}. \quad (4.51)$$

Podobně vypočteme další složky pole a dostaneme

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} C_x \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \\ C_y \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \\ C_z \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \end{pmatrix} \exp(-i\omega t), \quad (4.52)$$

$$i\omega\vec{B}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \left(\frac{n\pi}{b}C_z - \frac{p\pi}{c}C_y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \\ \left(\frac{p\pi}{c}C_x - \frac{m\pi}{a}C_z\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \\ \left(\frac{m\pi}{a}C_y - \frac{n\pi}{b}C_x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \end{pmatrix} \exp(-i\omega t), \quad (4.53)$$

kde $C_x \equiv 2iA_x$, $C_y \equiv 2iA_y$ a $C_z \equiv 2A_z$. Tyto konstanty však nejsou nezávislé, z (4.44) vyplývá

$$C_x \frac{m}{a} + C_y \frac{n}{b} + C_z \frac{p}{c} = 0. \quad (4.54)$$

Pro danou trojici čísel m, n, p tedy řešení obsahuje dvě nezávislé konstanty, tj. každý vlastní kmit je dvojnásobně degenerován. Možné frekvence vlastních kmitů rezonátoru jsou dány vztahem (4.51). Rozložení polí odpovídající jednotlivým frekvencím udávají vztahy (4.52) a (4.53) spolu s podmínkou (4.54).

Všimněte si, že jsou-li alespoň dvě z čísel m, n, p rovny nule, je pole rovno nule. Proto pro nejnižší frekvenci vlastních kmitů bude právě jedno z těchto čísel rovno nule.

Příloha A

Diferenciální operace

Kartézské souřadnice (x, y, z)

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \equiv \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{e}_x \Delta A_x + \vec{e}_y \Delta A_y + \vec{e}_z \Delta A_z \quad (\text{A.5})$$

Cylindrické souřadnice (r, ϕ, z)

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\phi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \vec{e}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right] \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \equiv \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{e}_r \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) + \vec{e}_\phi \left(\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) + \vec{e}_z \Delta A_z \quad (\text{A.10})$$

Sférické souřadnice (r, θ, ϕ)

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (\text{A.11})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \vec{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ & + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] + \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \equiv \Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} & \left[\text{Poznámka : } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) \right] \\ \nabla^2 \vec{A} = & \vec{e}_r \left[\Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] \\ & + \vec{e}_\theta \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \\ & + \vec{e}_\phi \left(\Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Příloha B

Besselovy funkce

V úloze 2.10 jsme se setkali s rovnicí

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R = 0, \quad k \neq 0.$$

Zavedeme-li substituci $kr = x \geq 0$, dostaneme *Besselovu rovnici*

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - \nu^2) R = 0. \quad (\text{B.1})$$

Její libovolné řešení se nazývá *cylindrickou (Besselovou) funkcí* řádu ν . Pokud předpokládáme řešení ve tvaru mocninné řady

$$R(x) = x^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

nalezneme řešení

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{\nu+2m}, \quad (\text{B.2})$$

kde $\Gamma(x)$ je *Eulerova gamma-funkce*. $J_\nu(x)$ se nazývá *Besselova funkce prvního druhu*. Protože se jedná o diferenciální rovnici druhého řádu, musí obecné řešení obsahovat dvě nezávislé cylindrické funkce. Pokud ν není celé číslo, je druhým nezávislým řešením funkce $J_{-\nu}$.

Fyzikálně zajímavý případ je $\nu \equiv p$ je celé číslo. Potom

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(p+m)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{p+2m}, \quad (\text{B.3})$$

V tomto případě jsou funkce $J_{-p}(x)$ a $J_p(x)$ lineárně závislé, protože platí

$$J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x) \quad (\text{B.4})$$

a je nutné najít jiné nezávislé řešení.

Lze ukázat že pro libovolné reálné číslo ν , jsou lineárně nezávislé páry $J_\nu(x), N_\nu(x)$, kde $N_\nu(x)$ je *Neumannova funkce* (Besselova funkce druhého druhu) a $H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)$, *Hankelovy funkce prvního a druhého druhu* (Besselovy funkce třetího druhu)

$$H_\nu^{(1)}(x) \equiv J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad (\text{B.5})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \equiv J_\nu(x) - iN_\nu(x). \quad (\text{B.6})$$

Obecné řešení pak lze napsat ve tvaru

$$R_\nu(x) = A_\nu J_\nu(x) + B_\nu N_\nu(x), \quad (\text{B.7})$$

nebo

$$R_\nu(x) = A_\nu H_\nu^{(1)}(x) + B_\nu H_\nu^{(2)}(x). \quad (\text{B.8})$$

Vztahy (B.5)–(B.8) samozřejmě platí i ve fyzikálně nejčastěji se vyskytujícím případě, kdy $\nu \equiv p$ je celé číslo.

Funkce $J_p(x)$ a $N_p(x)$ jsou znázorněny na obrázku B.1.

Pro cylindrické funkce Z_ν ($Z_\nu = J_\nu, N_\nu, H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$) platí následující rekurentní relace

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Z_\nu(x), \quad (\text{B.9})$$

$$Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) = 2 \frac{dZ_\nu(x)}{dx}, \quad (\text{B.10})$$

$$xZ_{\nu-1}(x) - (\nu - 1)Z_\nu(x) = \frac{d}{dx} [xZ_\nu(x)]. \quad (\text{B.11})$$

Každá z cylindrických funkcí má nekonečně mnoho kořenů. Nejčastěji potřebujeme kladné kořeny funkce $J_p(x)$

$$J_p(x) = 0, \quad (\text{B.12})$$

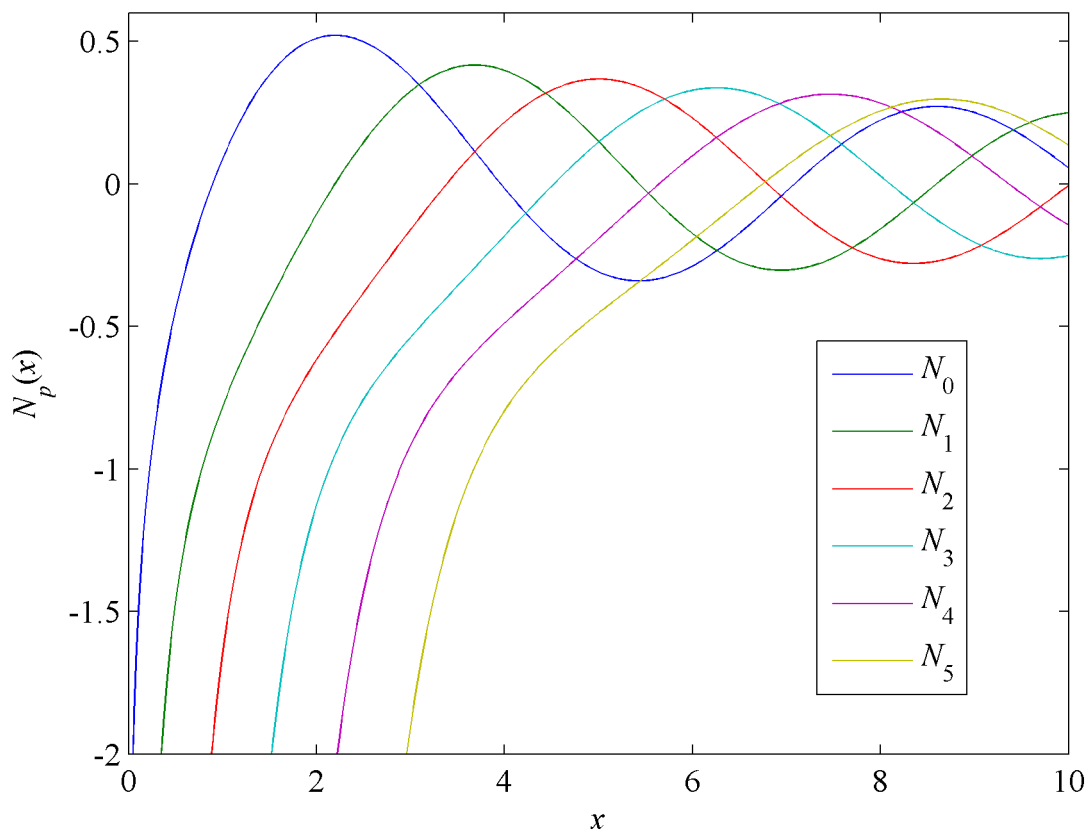
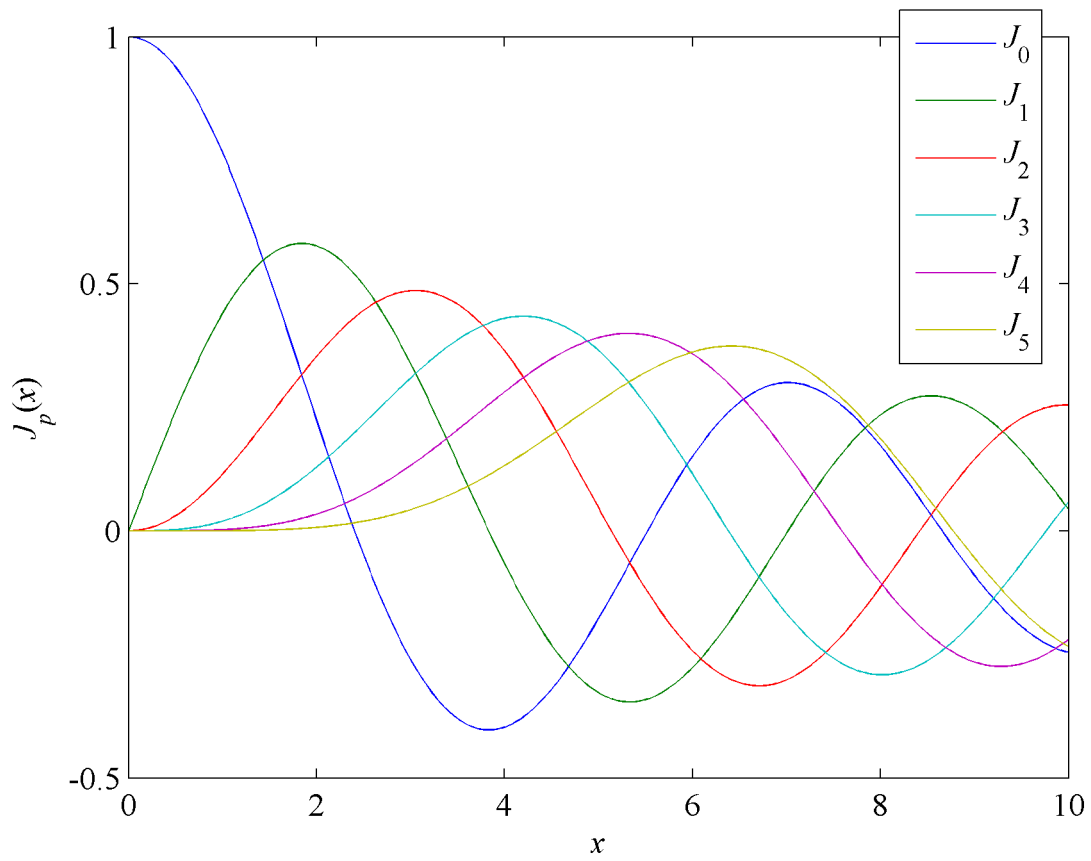
v dalším m -tý kořen funkce $J_p(x)$ označíme symbolem $\mu_m^{(p)}$. Pro prvních několik hodnot p jsou nejnižší kořeny

$$\begin{array}{llllll} p = 0, & \mu_m^{(0)} = 2.4048, & 5.5201, & 8.6537, & 11.7915, & 14.9309, \dots \\ p = 1, & \mu_m^{(1)} = 3.8317, & 7.0156, & 10.1735, & 13.3237, & 16.4706, \dots \\ p = 2, & \mu_m^{(2)} = 5.1356, & 8.4172, & 11.6198, & 14.7960, & 17.9598, \dots \\ p = 3, & \mu_m^{(3)} = 6.3802, & 9.7610, & 13.0152, & 16.2235, & 19.4094, \dots \end{array}$$

Besselovy funkce $J_\nu \left(\mu_1^{(\nu)} \frac{x}{a} \right), J_\nu \left(\mu_2^{(\nu)} \frac{x}{a} \right), \dots$ tvoří úplný systém ortogonálních funkcí na intervalu $\langle 0, a \rangle$, tj. platí

$$\int_0^a x J_\nu \left(\mu_n^{(\nu)} \frac{x}{a} \right) J_\nu \left(\mu_m^{(\nu)} \frac{x}{a} \right) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\mu_m^{(\nu)})]^2, & n = m. \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Poznámka: obecně lze cylindrické funkce definovat i pro komplexní argument (x nahradíme komplexním číslem z) a také ν může být komplexní číslo. Výše uvedené vztahy přitom zůstávají v platnosti.

Obrázek B.1: Besselovy funkce $J_p(x)$ a $N_p(x)$.