

B Besselovy funkce

Besselovy funkce $Z_\nu(z)$ řádu ν jsou řešením Besselovy diferenciální rovnice

$$z^2 Z_\nu''(z) + z Z_\nu'(z) + (z^2 - \nu^2) Z_\nu(z) = 0. \quad (1)$$

Proměnná z i řád ν mohou nabývat komplexních hodnot. V tomto přehledu se však omezíme pouze na případ, kdy z i ν jsou reálné.

Besselovy funkce jsou nesmírně důležité, neboť velké množství úloh, které mají rotační nebo sférickou symetrii (v E_N) nebo n -četnou symetrii v E_2 , vede k Besselově rovnici a Besselovým funkcím. Fakt, že Besselovými funkcemi se vyjadřují řešení problémů s rotační tedy válcovou symetrií, způsobil, že se Besselovým funkcím říká též cylindrické funkce. Toto označení však není vhodné, neboť také problémy jiné povahy, např. se sférickou symetrií, vedou k Besselovým funkcím. Mluví se pak např. o sférických Besselových funkcích a je zřejmé, že používat v této souvislosti názvu cylindrické funkce je jen obtížně možné.

O Besselových funkcích existuje rozsáhlá literatura, o níž si lze udělat aspoň částečnou představu nahlédnutím do příruček [1 – 4].

Optické systémy mají často rotační symetrii, a proto je samozřejmé, že se při optických výpočtech Besselových funkcí hodně používá.

Besselova rovnice (1) má tvar, z něhož není a priori zřejmá její důležitost. Uvedeme proto v odst. B.1.2 a B.1.3 příklady, jak se k Besselově rovnici dospěje při řešení parciálních rovnic, konkrétně vlnové rovnice.

B.1 Příklady vedoucí k Besselově rovnici

B.1.1 Vlnová rovnice a Helmholtzova rovnice

Vlnění $\Psi(\vec{r}, t)$ v neabsorbujícím homogenním a isotropním prostředí vyhovuje vlnové rovnici

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

v níž $\vec{r}$ má význam polohového vektoru (v E_N), t je čas, ∇^2 Laplaceův operátor (v E_N) a v je (konstantní) fázová rychlost.

Vlnová rovnice (1) je lineární a homogenní. Proto se při jejím řešení často používá Fourierovy metody řešení parciálních diferenciálních rovnic, kdy se hledá řešení ve tvaru lineární kombinace partikulárních řešení a každé z těchto partikulárních řešení má tvar součinu dvou funkcí,

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\tau(t), \quad (2)$$

z nichž jedna je funkcí pouze polohy $\vec{r}$ a druhá pouze času t . Proto se této metodě řešení parciálních diferenciálních rovnic říká také metoda separace proměnných. Její aplikaci lze převést řešení parciální diferenciální rovnice na řešení několika obyčejných diferenciálních rovnic a Besselova rovnice bývá jednou z nich.

Dosaďme tedy součin (2) do vlnové rovnice (1). Dostaneme

$$\tau(t) \nabla^2 \psi(\vec{r}) = \frac{1}{v^2} \psi(\vec{r}) \frac{d^2 \tau(t)}{dt^2} \quad (3)$$

a znásobením obou stran rovnice (3) výrazem $v^2/[\psi(\vec{r})\tau(t)]$ dospějeme k rovnici

$$v^2 \frac{\nabla^2 \psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} = \frac{\ddot{\tau}(t)}{\tau(t)}, \quad (4)$$

jejíž levá strana je funkcí pouze polohy a pravá pouze času. Tato rovnost musí platit pro všechny polohové vektory $\vec{r}$ a pro libovolný čas t . To je možné jen tehdy, když obě strany rovnice (4) jsou rovny téže konstantní hodnotě. Předpokládáme-li, že partikulární řešení (2) představuje harmonickou vlnu, je tato konstanta separace záporná. Označíme ji $-\omega^2$. (Pravá strana rovnice (4) pak vede na rovnici harmonických kmitů $\ddot{\tau}(t) + \omega^2 \tau = 0$ a její řešení, jak známo, jsou $\tau(t) = \exp(\pm i\omega t)$ resp. $\cos \omega t$, $\sin \omega t$). Z toho je vidět, že ω má význam kruhové frekvence.)

Z levé části rovnice (4) tak dostáváme tzv. Helmholtzovu rovnici (stacionární vlnovou rovnici)

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \psi(\vec{r}) = 0. \quad (5)$$

Pro harmonické vlny má podíl ω/v význam velikosti vlnového vektoru

$$\frac{\omega}{v} = k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (6)$$

Proto se Helmholtzova rovnice nejčastěji zapisuje ve tvaru

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + k^2 \psi(\vec{r}) = 0, \quad (7)$$

Tuto rovnici lze dále zjednodušit tím, že zavedeme bezrozměrnou proměnnou

$$\vec{\rho} = k\vec{r}. \quad (8)$$

Označíme

$$u(\vec{\rho}) = u(k\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \quad (9)$$

a vypočteme

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{r}} \psi(\vec{r}) &= k \nabla_{\vec{\rho}} u(\vec{\rho}), \\ \nabla_{\vec{r}}^2 \psi(\vec{r}) &= k^2 \nabla_{\vec{\rho}}^2 u(\vec{\rho}). \end{aligned} \quad (10)$$

Dosazením (10) do (7) dostaneme Helmholtzovu rovnici ve tvaru

$$\nabla_{\vec{\rho}}^2 u(\vec{\rho}) + u(\vec{\rho}) = 0, \quad (11)$$

v němž se konstanta k explicitně nevyskytuje.

Laplaceův operátor vyjádřený v hypersférických souřadnicích $\rho, \vartheta_i, \varphi$, $i = 1, \dots, N-2$, N -rozměrného prostoru má tvar

$$\nabla_{\vec{\rho}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{N-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \nabla_{\Omega}^2, \quad (12)$$

kde ∇_{Ω}^2 je diferenciální operátor obsahující nejvýše druhé derivace podle úhlových proměnných ϑ_i, φ , nikoli však podle radiální proměnné ρ . Konkrétně, v případě polárních souřadnic v E_2 je

$$\nabla_{\vec{\rho}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (13)$$

tj.

$$\nabla_{\Omega}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (14)$$

B.1.2 Besselova diferenciální rovnice celočíselného řádu

Helmholtzova rovnice B.1(11) pro dvojrozměrný prostor a vyjádřená v polárních souřadnicích ρ, φ má tedy vzhledem ke B.1(13) tvar

$$\frac{\partial^2 u(\rho, \varphi)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + u(\rho, \varphi) = 0. \quad (1)$$

K řešení této parciální diferenciální rovnice opět použijeme Fourierovu metodu separace proměnných a budeme předpokládat, že partikulární řešení mají tvar součinu

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi). \quad (2)$$

Dosadíme-li součin (2) do Helmholtzovy rovnice (1), dostaneme

$$R''\Phi + \frac{1}{\rho} R'\Phi + \frac{1}{\rho^2} \Phi''R + R\Phi = 0.$$

Po vynásobení výrazem $\rho^2/(R\Phi)$ přepíšeme tuto rovnici do tvaru

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \rho^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}, \quad (3)$$

v jehož levé straně jsou výrazy závislé jen na radiální proměnné ρ , zatímco pravá strana obsahuje výrazy závislé jen na úhlové proměnné φ . Lze tedy rovnici (3) splnit jen tak, že obě její strany se rovnají téže konstantě separace.

Tato konstanta separace je rovna druhé mocnině celého čísla. Vyplývá to z požadavku, že vlnová funkce $u(\rho, \varphi)$ je jednoznačnou funkcí polohy, a tedy funkce $\Phi(\varphi)$ musí být periodickou funkcí s periodou 2π . (Pravá strana rovnice (3) při separační konstantě n^2 vede k diferenciální rovnici $\Phi'' + n^2\Phi = 0$, jejíž řešení $\Phi(\varphi) = \exp(\pm in\varphi)$ jsou periodické funkce s periodou 2π , jen když n je celé číslo.)

Z levé části rovnice (3) pak dostáváme rovnici

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\rho^2 - n^2)R(\rho) = 0, \quad (4)$$

v níž poznáváme Besselovu rovnici pro Besselovy funkce celočíselného řádu n . Z významu konstanty separace n vyplývá, že řešení rovnice (4) dává radiální složku $R(\rho)$ partikulárního řešení (2) Helmholtzovy rovnice (1), jehož úhlová složka má n -četnou symetrii vzhledem k pólu $\rho = 0$. Pro $n = 0$ je tedy řešení rovnice (4) partikulárním řešením nezávislým na φ , tj. s úplnou rotační symetrií. Při $n = \pm 1$ je řešením rovnice (4) radiální složka partikulárního řešení Helmholtzovy rovnice, které má jednočetnou symetrii vzhledem k pólu $\rho = 0$, při $n = \pm 2$ jde o radiální složku partikulárního řešení s dvoučetnou symetrií atd.

B.1.3 Besselova diferenciální rovnice řádu $n + 1/2$

Shledali jsme právě, že v polárních souřadnicích v rovině se pro partikulární řešení Helmholtzovy rovnice s úplnou rotační symetrií (tj. nezávislé na φ) redukuje Helmholtzova rovnice B.1.2(1) na Besselovu rovnici B.1.2(4) s $n = 0$. Vyšetříme nyní, jak je tomu s partikulárním řešením s úplnou sférickou symetrií v prostorech s vyšší dimenzí, tj. $N = 3, 4, \dots$

Kulově symetrické řešení Helmholtzovy rovnice B.1.1(11) závisí jen na radiální proměnné ρ . Platí tedy

$$u(\vec{\rho}) = u(\rho, \vartheta_i, \varphi) = u(\rho)$$

a ovšem

$$\nabla_{\Omega}^2 u(\rho) = 0.$$

Helmholtzova rovnice B.1.1(11) se tedy (srov. B.1.1(12)) redukuje na obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{N-1}{\rho} \frac{du}{d\rho} + u = 0, \quad (1)$$

která však nemá tvar Besselovy rovnice. Zavedeme novou funkci $v(\rho)$ vztahem (srov. [5], rov. 2.162 (8))

$$u(\rho) = \frac{v(\rho)}{\rho^{\frac{N}{2}-1}} \quad (2)$$

a dosadíme ji do rovnice (1). Za tím účelem vypočteme

$$\begin{aligned} u'(\rho) &= \frac{1}{\rho^{\frac{N}{2}-1}} \left[v'(\rho) - \frac{\frac{N}{2}-1}{\rho} v(\rho) \right], \\ u''(\rho) &= \frac{1}{\rho^{\frac{N}{2}-1}} \left[v''(\rho) - \frac{N-2}{\rho} v'(\rho) + \frac{\frac{N}{2}(\frac{N}{2}-1)}{\rho^2} v(\rho) \right]. \end{aligned}$$

Dosazením posledních tří vztahů do rovnice (1) a úpravou dostaneme Besselovu rovnici řádu $\frac{N}{2} - 1$:

$$\rho^2 v''(\rho) + \rho v'(\rho) + \left[\rho^2 - \left(\frac{N}{2} - 1 \right)^2 \right] v(\rho) = 0. \quad (3)$$

Funkce $v(\rho)$, jež je řešením rovnice (3), je tedy Besselovou funkcí řádu $\frac{N}{2} - 1$ a funkce $u(\rho)$, do níž tuto funkci dosadíme (srov. (2)), je sféricky symetrickým řešením Helmholtzovy rovnice v E_N .

Hobson už více než před sto lety navrhoval pro funkci $Z_{\frac{N}{2}-1}(z)/(z^{\frac{N}{2}-1})$ ($Z_{\frac{N}{2}-1}$ je Besselova funkce řádu $\frac{N}{2}-1$) název cylindrická funkce hodnosti (rank) N (srov. [1], str. 129), avšak tento název se neujal. Pro $N = 3$ se však běžně používá funkce

$$z_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Z_{1/2}(z)$$

a říká se jí sférická Besselova funkce řádu nula (viz např. [4], § 10.1).

B.1.4 Fuchsova věta

Besselova rovnice B(1) je diferenciální rovnicí druhého řádu s proměnnými koeficienty. Při obecném řádu ν nelze vyjádřit její řešení součtem konečného počtu elementárních funkcí. Budeme proto řešení hledat ve tvaru zobecněných mocninných řad (Frobeniovy řady). Přitom budeme používat obrátů, které by se mohly zdát nezdůvodněně nahodilé pokud neuvedeme cíl, k němuž směřujeme. Tímto cílem je tvrzení Fuchsovy věty ([5], A.25.7, [7], §3, [8], §§8.5, 8.6), které nyní uvedeme pro obecnější případ diferenciální rovnice 2. řádu, a potom budeme její závěry specifikovat pro Besselovu diferenciální rovnici.

Fuchsova věta

Nechť funkce $p_1(x)$, $p_0(x)$ v diferenciální rovnici

$$(x - x_0)^2 y''(x) + (x - x_0)p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0 \quad (1)$$

lze rozvinout v mocninné řady

$$p_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, \quad p_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k \quad \text{pro } |x - x_0| \leq R \quad (2)$$

a přitom

$$a_0^2 + b_0^2 + b_1^2 > 0. \quad (3)$$

Jestliže pro kořeny r_1 , r_2 rovnice

$$r(r + a_0 - 1) + b_0 = 0 \quad (4)$$

platí, že $r_1 \neq r_2 + n$, kde n je celé číslo, pak fundamentálním řešením rovnice (1) jsou Frobeniovy řady

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}(x - x_0)^{r_1+k}; \quad c_0^{(1)} \neq 0, \quad |x - x_0| \leq R, \quad (5)$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)}(x - x_0)^{r_2+k}; \quad c_0^{(2)} \neq 0, \quad |x - x_0| \leq R. \quad (6)$$

Jestliže však $r_1 = r_2 + n$, tvoří fundamentální řešení diferenciální rovnice (1) funkce $y_1(x)$ daná výrazem (5) a funkce $y_2(x)$ ve tvaru

$$y_2(x) = Cy_1(x) \ln |x - x_0| + \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x - x_0)^{r_2+k}, \quad d_0 \neq 0, \quad |x - x_0| \leq R \quad (7)$$

a C je koeficient, jenž může být roven nule. (V případě $C = 0$ jsou fundamentálním řešením opět Frobeniovy řady (5), (6).)

Aplikujeme nyní Fuchsovu větu na Besselovu rovnici B(1). Je zřejmé, že

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \quad p_1(x) = 1, \quad p_0(x) = x^2 - \nu^2, \quad R = \infty, \\ a_0 &= 1, \quad a_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \\ b_0 &= -\nu^2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_k = 0, \quad k = 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Nerovnost (3) je splněna, neboť

$$a_0^2 + b_0^2 + b_1^2 = 1 + \nu^4 > 0.$$

Rovnice (4) je tvaru

$$r^2 - \nu^2 = 0$$

a její kořeny jsou $r_1 = \nu$ a $r_2 = -\nu$, takže $r_1 = r_2 + 2\nu$. Budeme tedy rozlišovat tři případy:

1. Je-li $2\nu \neq n$, má fundamentální řešení Besselovy rovnice tvar Frobeniovy řady

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} x^{\nu+k}, \quad (8)$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^{-\nu+k} \quad (9)$$

a v odst. B.2 jsou tyto řady ztotožněny s Besselovými funkcemi prvního druhu $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$.

2. Je-li $\nu = n$, tvoří fundamentální řešení funkce $y_1(x)$ ve tvaru (8) a funkce

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x| + \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{-\nu+k}, \quad (10)$$

kteřou v odst. B.3 ztotožníme s Besselovou funkcí druhého druhu $Y_\nu(x)$.

3. Je-li $\nu = n + 1/2$, jsou fundamentálním řešením Besselovy rovnice Frobeniovy řady (8), (9). (Jde o případ, kdy v řešení (7) je $C = 0$). Řady (8) a (9) v tomto případě dokonce vyjadřují elementární funkce (srov. B.5 a B.7).

B.2 Besselovy funkce prvního druhu

Podle Fuchsovy věty budeme hledat řešení Besselovy rovnice

$$x^2 Z''(x) + xZ'(x) + (x^2 - \nu^2)Z(x) = 0 \quad (1)$$

ve tvaru zobecněné mocninné řady (tzv. Frobeniovy)

$$Z(x) = x^r \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{r+j}, \quad (2)$$

v níž exponent r nejnižší mocniny je zatím neurčené reálné číslo (nikoli nezbytně celé číslo).

Stojíme tak před úkolem určit nejmenšího mocnitele r a všechny koeficienty a_j . Dosáhneme toho tím, že dosadíme řadu (2) do rovnice (1), která je anulovaná, vzniklý výraz uspořádáme podle mocnin x^{r+j} a položíme koeficienty všech mocnin rovny nule.

Za tím účelem vypočteme

$$x^2 Z'' = \sum_{j=0}^{\infty} (r+j)(r+j-1) a_j x^{r+j}, \quad (3)$$

$$xZ' = \sum_{j=0}^{\infty} (r+j) a_j x^{r+j}, \quad (4)$$

$$x^2 Z = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{r+j+2}, \quad (5)$$

$$\nu^2 Z = \sum_{j=0}^{\infty} \nu^2 a_j x^{r+j}. \quad (6)$$

Po dosazení těchto výrazů do Besselovy rovnice (1) získáme rovnici

$$x^r [r(r-1) + r - \nu^2] a_0 + x^{r+1} [(r+1)r + r + 1 - \nu^2] a_1 + \\ + \sum_{j=2}^{\infty} x^{r+j} \left\{ [(r+j)(r+j-1) + r + j - \nu^2] a_j + a_{j-2} \right\} = 0,$$

tj.

$$x^r (r^2 - \nu^2) a_0 + x^{r+1} [(r+1)^2 - \nu^2] a_1 + \sum_{j=2}^{\infty} x^{r+j} \left\{ [(r+j)^2 - \nu^2] a_j + a_{j-2} \right\} = 0. \quad (7)$$

Aby tato rovnice platila, musejí být koeficienty u všech mocnin proměnné x rovny nule, tedy

$$(r^2 - \nu^2) a_0 = 0, \quad (8)$$

$$[(r+1)^2 - \nu^2] a_1 = 0, \quad (9)$$

$$[(r+j)^2 - \nu^2] a_j + a_{j-2} = 0, \quad j = 2, 3, \dots \quad (10)$$

Poněvadž předpokládáme, že $a_0 \neq 0$ ($a_0 x^r$ je první nenulový člen Frobeniovy řady (2)), vyplývá z rovnice (8), že

$$r^2 = \nu^2. \quad (11)$$

Pak ovšem (při $r = \nu \neq -1/2$) lze rovnici (9) splnit jen tak, že

$$a_1 = 0. \quad (12)$$

(V případě $\nu = -1/2$ považujeme vztah (12) za volbu. O tomto případě pojednává odst. B.5.) Rovnice (10) je rekurentním vztahem pro určení koeficientu a_j prostřednictvím koeficientu a_{j-2} :

$$a_j = \frac{-a_{j-2}}{(r+j)^2 - \nu^2}, \quad j = 2, 3, \dots \quad (13)$$

Pro koeficienty s lichým indexem vzhledem k (12) tedy platí

$$a_{2k+1} = 0. \quad (14)$$

Koeficienty se sudým indexem mají tvar

$$a_2 = \frac{-a_0}{(r+2)^2 - \nu^2}, \\ a_4 = \frac{-a_2}{(r+4)^2 - \nu^2} = \frac{a_0}{[(r+4)^2 - \nu^2][(r+2)^2 - \nu^2]}$$

atd. Obecně

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{\prod_{l=1}^k [(r+2l)^2 - \nu^2]}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Podmínka (11) je ekvivalentní podmínce $r = \pm \nu$. Vyšetříme oba případy. Přitom budeme předpokládat, že $\nu \geq 0$.

1. Vyšetříme nejprve případ $r = \nu$. Koeficienty (15) nabudou tvaru

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{\prod_{l=1}^k [4l(\nu + l)]} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Dosazením výrazů (14) a (16) do Frobeniovy řady (2) dostáváme partikulární řešení Besselovy rovnice (1) ve tvaru

$$Z(x) = a_0 x^\nu \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (\nu+1)(\nu+2) \cdots (\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right],$$

kde a_0 je libovolná integrační konstanta. Zvolíme ji ve tvaru

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \quad (17)$$

a partikulární řešení Besselovy rovnice (1) má tvar

$$Z(x) = J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad (18)$$

jenž se nazývá Besselovou funkcí 1. druhu řádu ν .

2. Jak vyplývá z Fuchsovy věty, musíme při vyšetřování případu, že $r = -\nu$, rozlišovat dva případy.

(i) Je-li $\nu \neq 0, 1, 2, \dots$, můžeme postupovat stejným způsobem jako v případě 1 a analogicky k (18) dostaneme

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}. \quad (19)$$

Při $\nu^2 \neq n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, jsou $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ lineárně nezávislá partikulární řešení a obecné řešení Besselovy diferenciální rovnice (1) je

$$Z_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \quad (20)$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. (Že funkce $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$ jsou při necelých hodnotách řádu ν lineárně nezávislé, je zřejmé. Je-li např. $\nu = 1/2$, tvoří funkci $J_{1/2}(x)$ mocniny $x^{1/2}, x^{5/2}, x^{9/2}, \dots$, zatímco funkci $J_{-1/2}(x)$ tvoří mocniny $x^{-1/2}, x^{3/2}, x^{7/2}, \dots$.)

(ii) Je-li $\nu^2 = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, není možné postupovat při vyšetřování případu $r = -\nu$ obdobně jako sub (i). (Je to vidět také z toho, že výrazy (16) pro koeficienty a_{2k} by při $k \geq n$ měly nulové jmenovatele a koeficient $a_0 = 1/[2^\nu \Gamma(-n+1)]$ je nulový pro $n \geq 1$.) Ukážeme, že Besselova funkce

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \quad (21)$$

je lineárně závislá s funkcí $J_n(x)$ a platí

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (22)$$

Pro $-n+k+1 \leq 0$ je totiž $|\Gamma(-n+k+1)| = \infty$, takže první nenulový člen řady (21) splňuje podmínku $-n+k+1 = 1$, tj. $k = n$. Zavedením sčítacího indexu $l = k - n$ nahlédneme, že řadu (21) lze přepsat do tvaru:

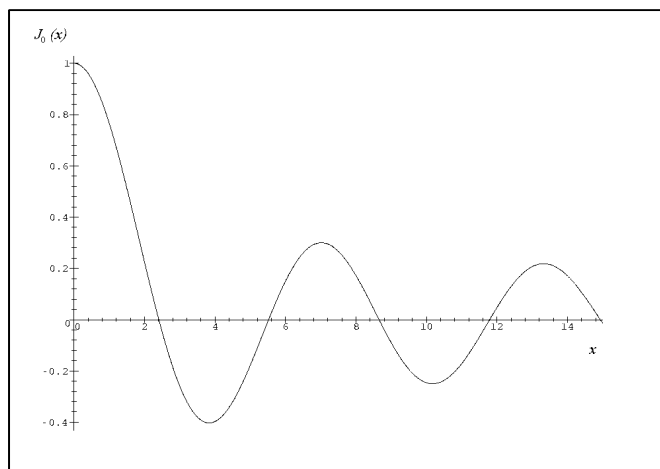
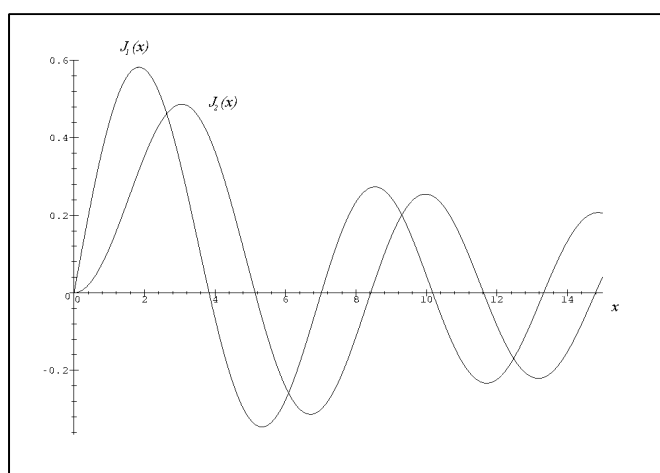
$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} = (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(n+l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l} = (-1)^n J_n(x).$$

Při celočíselné hodnotě indexu ν tedy výraz (20) nepředstavuje obecné řešení Besselovy rovnice (1). Abychom získali obecné řešení také v tomto případě, musíme najít partikulární řešení nezávislé na $J_n(x)$. Uděláme to v následujícím odstavci.

Závěrem tohoto odstavce uvedeme na obr. 1 a 2 grafy funkcí $J_0(x)$, $J_1(x)$ a $J_2(x)$. Abychom upozornili na chování funkce $J_n(x)$ v okolí počátku, rozepíšeme řadu

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{2(n+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+4} \mp \dots \quad (23)$$

Je zřejmé, že pro $n = 1, 2, \dots$ prochází funkce $J_n(x)$ počátkem a při vyšších hodnotách n velmi pomalu roste v pravém okolí počátku (viz obr. 3).

Obrázek 1: Graf Besselovy funkce $J_0(x)$.Obrázek 2: Grafy funkcí $J_1(x)$ a $J_2(x)$.

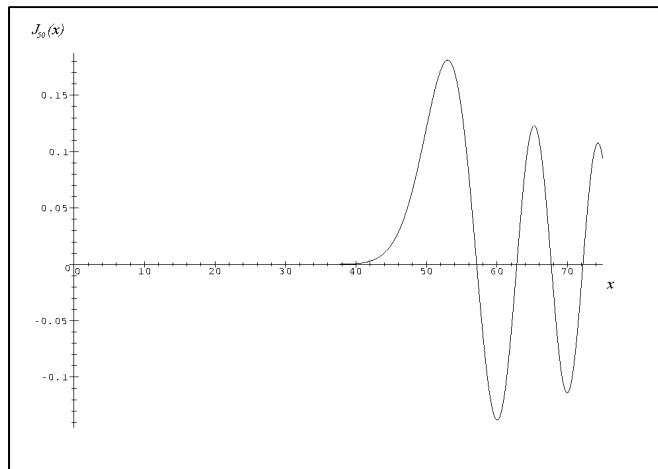
Pro $n = 0, 1$ a 2 zřejmě platí

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \pm \dots, \\ J_1(x) &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3 \pm \dots, \\ J_2(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^4 \pm \dots. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že při obecné (tedy i neceločíselné) hodnotě indexu ν platí, že pro $x \rightarrow 0$ je $J_\nu(x) \approx \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$.

B.3 Besselovy funkce druhého druhu

Stojíme nyní před problémem najít partikulární řešení Besselovy rovnice B.2(1) lineárně nezávislé na $J_\nu(x)$ při celočíselném ν . Předpokládejme nejprve, že ν není celé číslo a zvolme v lineární kombinaci B.2(20)

Obrázek 3: Graf funkce $J_{50}(x)$.

$$C_1 = \cotg \pi\nu, \quad C_2 = -\frac{1}{\sin \pi\nu}.$$

Dostaneme tak funkci

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad \text{pro } \nu \neq \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

která se nazývá Besselovou funkcí 2. druhu nebo Weberovou funkcí. V německé literatuře se značí též $N_\nu(x)$ a nazývá se Neumannovou funkcí. Je zřejmé, že tato funkce vyhovuje Besselově rovnici B.2(1) a že je lineárně nezávislá jak s funkcí $J_\nu(x)$, tak s funkcí $J_{-\nu}(x)$.

Při celočíselném ν by vzhledem ke vztahu B.2(22) byl čitatel i jmenovatel výrazu (1) roven nule, a proto definujeme pro $\nu = n$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (2)$$

Podle l'Hospitalova pravidla tedy zderivujeme čitatele i jmenovatele podle indexu ν :

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{-J_\nu(x) \pi \sin(\pi\nu) + \cos(\pi\nu) \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}}{\pi \cos(\pi\nu)} = \\ &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{(-1)^n \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}}{\pi(-1)^n} = \frac{1}{\pi} \lim_{\nu \rightarrow n} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Derivujeme-li tedy řady B.2(18) a B.2(19) podle ν a použijeme-li funkci

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x), \quad (4)$$

dostaneme požadované derivace ve tvaru

$$\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} = J_\nu(x) \ln \frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \Psi(\nu + k + 1), \quad (5)$$

$$\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} = -J_{-\nu}(x) \ln \frac{x}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k} \Psi(-\nu + k + 1). \quad (6)$$

Dosazením (5) a (6) do (3), vypočtením limit a použitím vztahu B.2(22) dostaneme

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[2J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Psi(n+k+1)}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k} \Psi(-n+k+1)}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \right]. \quad (7)$$

Označíme druhou sumu v hranaté závorce symbolem S a vyčleníme z ní prvních n členů:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+k} \Psi(-n+k+1)}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} + \sum_{l=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l} \Psi(-n+l+1)}{l! \Gamma(-n+l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2l}. \quad (8)$$

Pro všechny sčítance prvního součtu je $-n+k+1 \leq 0$. Z identity (43) kapitoly o funkci gamma plyne, že

$$\frac{\Psi(-n+k+1)}{\Gamma(-n+k+1)} = (-1)^{n-k} \Gamma(n-k) = (-1)^{n-k} (n-k-1)!. \quad (9)$$

Výrazu (9) použijeme ke zjednodušení prvního součtu ve výrazu (8). Ve druhém součtu zavedeme sčítací index $k = -n+l$, takže $-n+2l = n+2k$. Výraz (8) se tím zjednoduší do tvaru

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Psi(k+1)}{k! (k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \quad (10)$$

Dosaďme-li do (7) za poslední sumu výraz (10), dostaneme funkci $Y_n(x)$ ve tvaru

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[2J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [\Psi(k+1) + \Psi(n+k+1)]}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \right]. \quad (11)$$

S použitím vztahu (40) kapitoly o funkci gamma vypočteme

$$\Psi(k+1) + \Psi(n+k+1) = -C + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} - C + \sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} = -2C + 2 \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m+k}$$

($C = 0,577\,215\,6649 \dots$ je Eulerova–Mascheroniová konstanta), což dosazeno do (11) dává

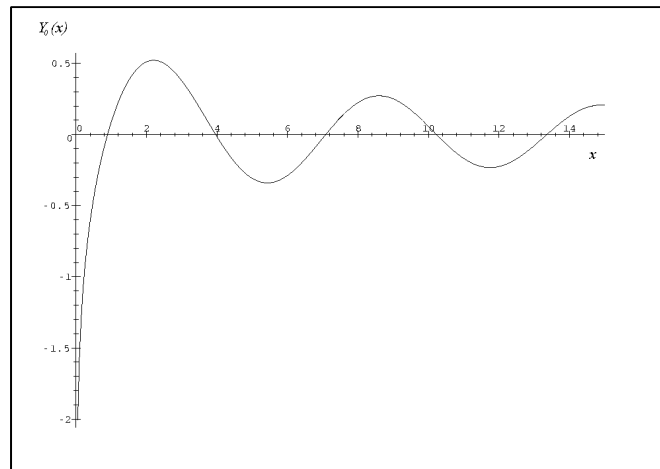
$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[2J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2(-C + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m+k}}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \right]. \quad (12)$$

Vyčleníme-li z nekonečné řady ve (12) řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(-C)}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = -2C J_n(x),$$

dostaneme pro funkci $Y_n(x)$ výsledný výraz

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[2J_n(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2 \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m+k}}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \right]. \quad (13)$$

Obrázek 4: Graf funkce $Y_0(x)$.

Pro $n = 0, 1$ a 2 vypočteme

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left\{ J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right] \right\} = \quad (14)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) + \left(\frac{x}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} \right)^4 \pm \dots \right],$$

$$Y_1(x) = \frac{1}{\pi} \left[2J_1(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \left(\frac{x}{2} \right)^{-1} + \frac{x}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \frac{1}{k+1}}}{k! (k+1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{1+2k} \right], \quad (15)$$

$$Y_2(x) = \frac{1}{\pi} \left[2J_2(x) \left(\ln \frac{x}{2} + C \right) - \left(\frac{x}{2} \right)^{-2} - 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} \right)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}}}{k! (k+2)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2+2k} \right]. \quad (16)$$

Grafy funkcí $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ a $Y_2(x)$ jsou na obr. 4 a 5. Z výrazu (13) je zřejmé, že pro $x \rightarrow 0$ je $Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln x$ a $Y_n(x) \approx -\frac{2^n (n-1)!}{\pi x^n}$, pro $n = 1, 2, \dots$.

Obecné řešení Besselovy diferenciální rovnice B.2(1) můžeme tedy vždy zapsat ve tvaru

$$Z_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x). \quad (17)$$

Z definičních vztahů funkcí $Y_\nu(x)$ a $Y_{-\nu}(x)$

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad Y_{-\nu}(x) = \frac{J_{-\nu}(x) \cos(\nu\pi) - J_\nu(x)}{-\sin(\nu\pi)} \quad (18)$$

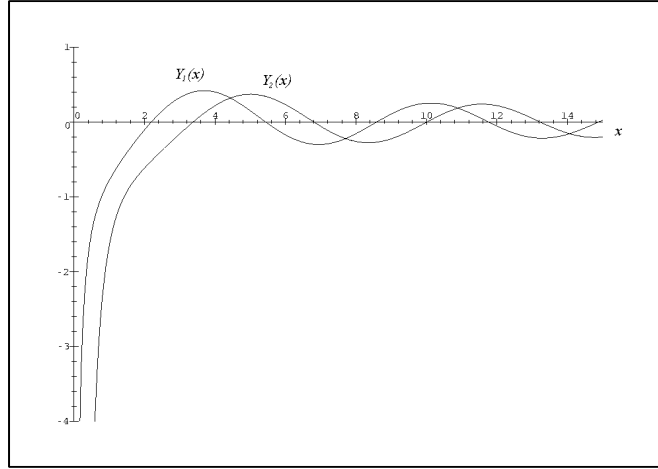
eliminací funkce $J_{-\nu}$ dostaneme

$$Y_{-\nu}(x) = Y_\nu(x) \cos(\pi\nu) + J_\nu(x) \sin(\pi\nu). \quad (19)$$

Pro celočíselné hodnoty n indexu ν platí

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x). \quad (20)$$

Prísne vzato vztah (20) nevyplývá ze vztahu (19), neboť pak by odvození vztahu (19) pro celočíselné ν zahrnovalo nedovolené operace (dělení nulou). Vztah (20) však lze jednoduše získat přímo ze vztahu (3):

Obrázek 5: Grafy funkcí $Y_1(x)$ a $Y_2(x)$.

$$Y_{-n}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\nu \rightarrow -n} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right].$$

S označením $\mu = -\nu$ přepíšeme poslední vztah pro $Y_{-n}(x)$ do tvaru

$$\begin{aligned} Y_{-n}(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow n} \left[-\frac{\partial J_{-\mu}(x)}{\partial \mu} + (-1)^n \frac{\partial J_\mu(x)}{\partial \mu} \right] = \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow n} \left[\frac{\partial J_\mu(x)}{\partial \mu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\mu}(x)}{\partial \mu} \right] = (-1)^n Y_n(x). \end{aligned}$$

Platí tedy vztah (19) pro libovolnou hodnotu indexu ν (včetně celočíselných hodnot).

Z definičního vztahu (1) funkce $Y_\nu(x)$ a z B.2(22) také plyne, že pro obecnou hodnotu indexu ν platí

$$J_{-\nu}(x) = J_\nu(x) \cos(\pi\nu) - Y_\nu(x) \sin(\pi\nu). \quad (21)$$

B.4 Besselovy funkce třetího druhu

Besselovy funkce 3. druhu, nazývané nejčastěji Hankelovými funkcemi, jsou definovány vztahy

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x). \quad (1)$$

Je zřejmé, že funkce $H_\nu^{(1)}(x)$ a $H_\nu^{(2)}(x)$ jsou rovněž fundamentálním řešením Besselovy diferenciální rovnice. Sféricky symetrické řešení Helmholtzovy rovnice B.1.3(1) v prostoru dimenze $N = 1, 2, 3, 4, \dots$ má tedy tvar (srov. B.1.3(2))

$$u(\rho) = C_1 \frac{H_{\frac{N}{2}-1}^{(1)}(\rho)}{\rho^{\frac{N}{2}-1}} + C_2 \frac{H_{\frac{N}{2}-1}^{(2)}(\rho)}{\rho^{\frac{N}{2}-1}}. \quad (2)$$

Ukážeme v závěru přístího odstavce, že první sčítanec souvisí s prostorovou částí rozbíhavé kulové harmonické vlny a druhý sčítanec s prostorovou částí sbíhavé vlny.

Vedení analogií s Eulerovým vzorcem

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x, \quad \exp(-ix) = \cos x - i \sin x$$

vyjádříme z definičních vztahů (1)

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2} [H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)], \quad Y_\nu(x) = \frac{1}{2i} [H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)]. \quad (3)$$

Dosazením vztahů B.3(18) a B.3(19) do (1) a do analogických vztahů pro $H_{-\nu}^{(1)}(x)$ a $H_{-\nu}^{(2)}(x)$ vypočteme

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = \exp(i\nu\pi)H_{\nu}^{(1)}(x), \quad H_{-\nu}^{(2)}(x) = \exp(-i\nu\pi)H_{\nu}^{(2)}(x). \quad (4)$$

Vztahy (4) platí pro libovolnou hodnotu ν . V případě, že ν je celé číslo, $\nu = n$, zjednoduší se do tvaru

$$H_{-n}^{(1)}(x) = (-1)^n H_n^{(1)}(x), \quad H_{-n}^{(2)}(x) = (-1)^n H_n^{(2)}(x). \quad (5)$$

V případě, že $\nu \neq n$ můžeme vyloučením funkce $Y_{\nu}(x)$ ze soustavy rovnic (1) a B.3(1) vyjádřit Hankelovy funkce pomocí Besselových funkcí 1. druhu:

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = \frac{\exp(-i\nu\pi)J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)}{-i\sin(\nu\pi)}, \quad H_{\nu}^{(2)}(x) = \frac{\exp(i\nu\pi)J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)}{i\sin(\nu\pi)}, \quad \nu \neq n. \quad (6)$$

Poznámka k definičnímu oboru a oboru hodnot Besselových funkcí. Funkce $J_{\nu}(x)$, $Y_{\nu}(x)$, $H_{\nu}^{(1)}(x)$, $H_{\nu}^{(2)}(x)$ jsou definovány v celé komplexní rovině proměnné x s výjimkou záporné části reálné osy a nabývají komplexních hodnot. Jak už bylo uvedeno, zabýváme se pouze reálným oborem proměnné x , a tedy $x \in \langle 0, \infty \rangle$, což je ve shodě s významem této proměnné v aplikacích (velikost průvodiče apod.). Pro tyto hodnoty proměnné x jsou funkce $J_{\nu}(x)$ a $Y_{\nu}(x)$ reálné při všech reálných hodnotách indexu ν .

B.5 Besselovy funkce řádu $\nu = \pm 1/2$

V předcházejícím odstavci jsme upozornili na analogii mezi Besselovými a trigonometrickými funkcemi. V tomto a následujícím odstavci uvedeme další skutečnosti této analogie. Začneme tím, že budeme vyšetřovat, za jakých podmínek přechází Besselova diferenciální rovnice

$$x^2 Z_{\nu}''(x) + x Z_{\nu}'(x) + (x^2 - \nu^2) Z_{\nu}(x) = 0 \quad (1)$$

v rovnici

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad (2)$$

jejímž fundamentálním řešením jsou funkce $\cos x$, $\sin x$, resp. $\exp(ix)$, $\exp(-ix)$.

Dosadíme do rovnice (1) funkci $Z_{\nu}(x)$ ve tvaru

$$Z_{\nu}(x) = x^{\mu} \xi_{\nu}(x) \quad (3)$$

se zatím nespecifikovanou hodnotou exponentu μ . Vypočteme

$$\begin{aligned} Z_{\nu}'(x) &= \mu x^{\mu-1} \xi_{\nu}(x) + x^{\mu} \xi_{\nu}'(x), \\ Z_{\nu}''(x) &= \mu(\mu-1)x^{\mu-2} \xi_{\nu}(x) + 2\mu x^{\mu-1} \xi_{\nu}'(x) + x^{\mu} \xi_{\nu}''(x) \end{aligned}$$

a dosadíme do rovnice (1):

$$x^{\mu+2} \xi_{\nu}''(x) + (2\mu+1)x^{\mu+1} \xi_{\nu}'(x) + [\mu(\mu-1) + \mu + x^2 - \nu^2] x^{\mu} \xi_{\nu}(x) = 0.$$

Podělením této rovnice mocninou $x^{\mu+2}$ a úpravou dostaneme

$$\xi_{\nu}''(x) + (2\mu+1)\frac{1}{x}\xi_{\nu}'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2 - \mu^2}{x^2}\right) \xi_{\nu}(x) = 0. \quad (4)$$

Má-li rovnice (4) přejít v rovnici (2), musí být koeficient u ξ_{ν}' roven nule, tj.

$$\mu = -\frac{1}{2}. \quad (5)$$

Rovnice (4) tím získává tvar

$$\xi_{\nu}''(x) + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right) \xi_{\nu}(x) = 0, \quad (6)$$

jenž přejde v rovnici (2), když zlomek $(\nu^2 - 1/4)/x^2$ bude nula. To nastane ve dvou případech: (i) když $\nu = \pm 1/2$ a (ii) když $x^2 \gg \nu^2 - 1/4$. Všimněme si v tomto odstavci případu (i), případ (ii) probereme v příštím odstavci a využijeme jej k vyšetření asymptotických vlastností Besselových funkcí.

Když $\nu = \pm 1/2$, má obecné řešení rovnice (1) tvar jednak

$$Z_{\pm 1/2}(x) = c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}},$$

jednak

$$Z_{\pm 1/2}(x) = C_1 J_{\pm 1/2}(x) + C_2 J_{\mp 1/2}(x).$$

Lze tedy očekávat úměrnost např. mezi funkcemi $J_{1/2}(x)$ a $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ apod. Abychom našli koeficient této úměrnosti, upravíme mocninné řady funkcí $J_{1/2}(x)$ a $J_{-1/2}(x)$:

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\frac{3}{2} + k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}, \\ J_{-1/2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\frac{1}{2} + k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k}. \end{aligned}$$

Podle vztahu (12) kapitoly o funkci gamma platí

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + k\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k+1}} \frac{(2k+1)!}{k!}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}} \frac{(2k-1)!}{(k-1)!}.$$

Dosazením těchto hodnot funkce gamma do mocninných rozvoji a úpravou dostaneme

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad (7)$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (8)$$

Z definičního vztahu B.3(1) Weberových funkcí pak vyplývá

$$Y_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad (9)$$

$$Y_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad (10)$$

a z definičního vztahu B.4(1) Hankelových funkcí se dostane

$$H_{1/2}^{(1)}(x) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp(ix) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp[i(x - \pi/2)], \quad (11)$$

$$H_{1/2}^{(2)}(x) = i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp(-ix) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp[-i(x - \pi/2)], \quad (12)$$

$$H_{-1/2}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp(ix), \quad (13)$$

$$H_{-1/2}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp(-ix). \quad (14)$$

Sféricky symetrické řešení Helmholtzovy rovnice B.1.3(1) v trojrozměrném prostoru má podle rovnice B.4(2) tvar ($\rho = kr$, viz B.1.1(8))

$$u(\rho) = C_1 \frac{H_{1/2}^{(1)}(\rho)}{\sqrt{\rho}} + C_2 \frac{H_{1/2}^{(2)}(\rho)}{\sqrt{\rho}} = c_1 \frac{\exp(i\rho)}{\rho} + c_2 \frac{\exp(-i\rho)}{\rho}.$$

Ze vztahů (11) a (12) je pak zřejmé, že (za úmluvy, že časový průběh vlny charakterizuje funkce $\exp(-i\omega t)$) funkce $H_{1/2}^{(1)}(\rho)/\sqrt{\rho}$ představuje prostorovou část rozbíhavé kulové vlny a $H_{1/2}^{(2)}(\rho)/\sqrt{\rho}$ sbíhavé kulové vlny v trojrozměrném prostoru.

B.6 Asymptotické chování Besselových funkcí pro $x \gg \sqrt{|\nu^2 - 1/4|}$

Pro $x \gg \sqrt{|\nu^2 - 1/4|}$ je řešení Besselovy rovnice B.5(1) tvaru

$$Z_\nu(x) \approx c_1 \frac{\exp(ix)}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\exp(-ix)}{\sqrt{x}}, \quad x \gg \sqrt{|\nu^2 - 1/4|}.$$

Rovněž však platí

$$Z_\nu(x) = C_1 H_\nu^{(1)}(x) + C_2 H_\nu^{(2)}(x).$$

Vzhledem k výsledkům odst. B.5 lze očekávat, že platí

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \alpha_\nu \frac{\exp(ix)}{\sqrt{x}}, \quad H_\nu^{(2)}(x) \approx \alpha_\nu^* \frac{\exp(-ix)}{\sqrt{x}}, \quad \text{pro } x \gg \sqrt{|\nu^2 - 1/4|}. \quad (1)$$

Dále se již touto cestou nedostaneme. Odvození konstanty α_ν je totiž komplikované (viz např. [9], str. 669–673). Dostaneme ji však z asymptotických rozvoji Besselových funkcí, které zde bez důkazu uvedeme.

Asymptotické rozvoje Besselových funkcí mají tvar (viz např. [1], §§7.2, 7.21)

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + k + 1/2)}{k! \Gamma(\nu - k + 1/2)} \left(\frac{i}{2x}\right)^k, \quad (2)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + k + 1/2)}{k! \Gamma(\nu - k + 1/2)} \left(\frac{-i}{2x}\right)^k, \quad (3)$$

$$J_{\pm\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x \mp \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 2k + 1/2)}{(2k)! \Gamma(\nu - 2k + 1/2)} \left(\frac{1}{2x}\right)^{2k} - \right. \\ \left. - \sin\left(x \mp \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 2k + 3/2)}{(2k+1)! \Gamma(\nu - 2k - 1/2)} \left(\frac{1}{2x}\right)^{2k+1} \right], \quad (4)$$

$$Y_{\pm\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin\left(x \mp \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 2k + 1/2)}{(2k)! \Gamma(\nu - 2k + 1/2)} \left(\frac{1}{2x}\right)^{2k} + \right. \\ \left. + \cos\left(x \mp \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu + 2k + 3/2)}{(2k+1)! \Gamma(\nu - 2k - 1/2)} \left(\frac{1}{2x}\right)^{2k+1} \right]. \quad (5)$$

Omezíme-li se v rozvoji pouze na člen nezáviselý na proměnné x (je roven 1), dostaneme koeficient α_ν v (1):

$$\alpha_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-i\frac{\pi}{4}(2\nu + 1)\right].$$

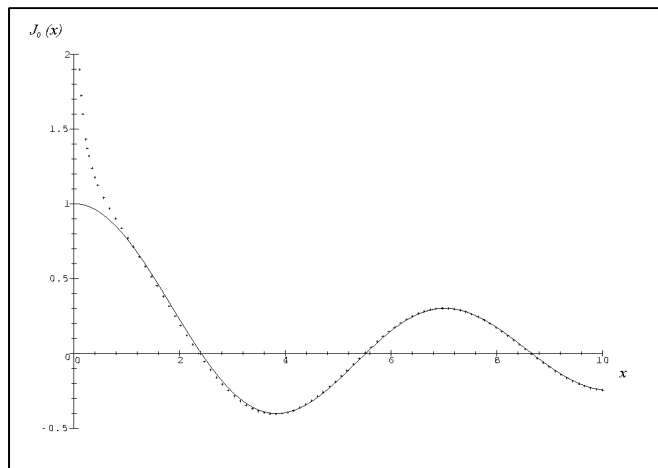
Platí tedy

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left(x - \pi\frac{2\nu+1}{4}\right)\right] + O(x^{-3/2}), \quad (6)$$

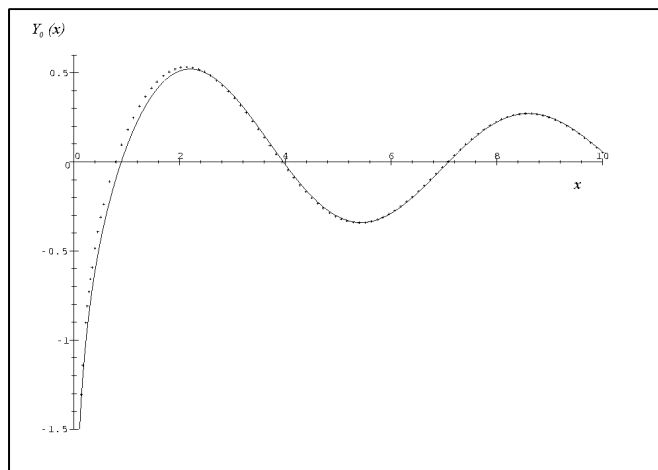
$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \pi\frac{2\nu+1}{4}\right)\right] + O(x^{-3/2}), \quad (7)$$

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \pi \frac{2\nu + 1}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad (8)$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \pi \frac{2\nu + 1}{4}\right) + O(x^{-3/2}). \quad (9)$$



Obrázek 1: Aproximace funkce $J_0(x)$ funkcí (11).



Obrázek 2: Aproximace funkce $Y_0(x)$ funkcí (12).

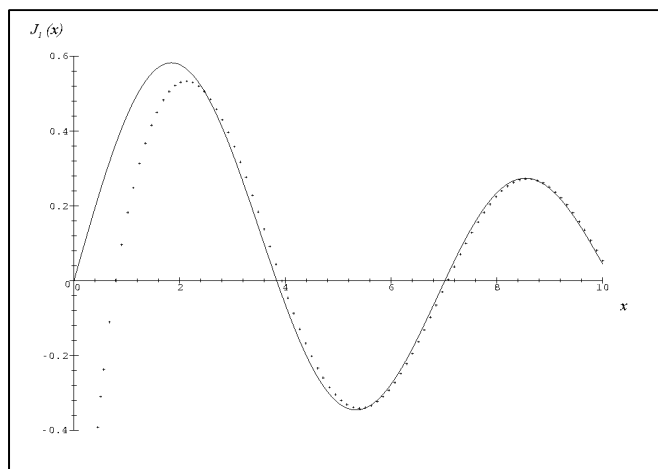
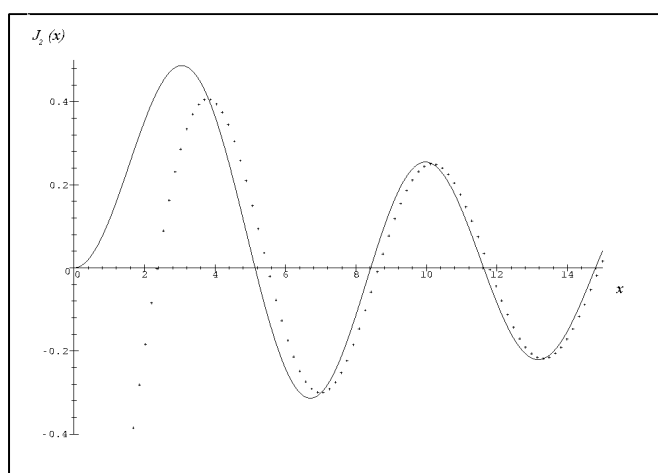
Konkrétně např. je

$$H_0^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad H_0^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad (10)$$

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad (11)$$

$$Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad (12)$$

$$J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad (13)$$

Obrázek 3: Aproximace funkce $J_1(x)$ funkcí (13).Obrázek 4: Aproximace funkce $J_2(x)$ funkcí (14).

$$J_2(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \quad (14)$$

Na obr. 1 až 4 jsou grafy, které dávají představu o tom, jak dobře tyto jednoduché asymptotické výrazy (tečkovaně) aproximují Besselovy funkce (plná čára).

Kruhově symetrická rozbíhavá harmonická vlna v rovině má tvar

$$\Psi(r, t) = H_0^{(1)}(kr) \exp(-i\omega t) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left[-i\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (15)$$

a sbíhavá kruhově symetrická harmonická vlna v rovině je tvaru

$$\Psi(r, t) = H_0^{(2)}(kr) \exp(-i\omega t) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left[-i\left(\omega t + kr - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (16)$$

Z výrazů (8) a (9) (ale také už z (1)) lze čekat, že Besselovy a Weberovy funkce nabývají (podobně jako trigonometrické funkce $\sin x$ a $\cos x$) nulových hodnot v nekonečně mnoha bodech a že pro $x \gg \sqrt{|\nu^2 - 1/4|}$ vzdálenost sousedních nulových bodů nezávisí na ν a je přibližně rovna π .

B.7 Besselovy funkce řádu $\nu = n + 1/2$

Viděli jsme již v odst. B.5, že Besselovy funkce řádu $\pm 1/2$ se redukují na elementární funkce. Stejně je tomu, když je řád ν roven celému číslu plus jedna polovina.

Vyšetříme nejprve případ, kdy ve výrazu $\nu = n + 1/2$ je n přirozené číslo. Pak asymptotické řady v rozvoích B.6(2) až B.6(5) mají jen konečný počet sčítanců, a jsou tedy elementárními funkcemi. Je to způsobeno tím, že výraz

$$\frac{\Gamma(\nu + k + 1/2)}{\Gamma(\nu - k + 1/2)} = (\nu + k - 1/2) \cdots (\nu + 1/2)(\nu - 1/2) \cdots (\nu - k + 1/2) \quad (1)$$

nabude v případě $\nu = n + 1/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ tvaru

$$\frac{\Gamma(n + 1 + k)}{\Gamma(n + 1 - k)} = (n + k)(n + k - 1) \cdots (n + 1)n(n - 1) \cdots (n - k + 2)(n - k + 1), \quad (2)$$

jenž je roven nule, když $k \geq n + 1$. Je proto (srov. též např. [2], §7.11)

$$H_{n+1/2}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left\{ i \left[x - (n + 1) \frac{\pi}{2} \right] \right\} \sum_{k=0}^n \frac{(n + k)!}{k! (n - k)!} \left(\frac{i}{2x} \right)^k, \quad (3)$$

$$H_{n+1/2}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left\{ -i \left[x - (n + 1) \frac{\pi}{2} \right] \right\} \sum_{k=0}^n \frac{(n + k)!}{k! (n - k)!} \left(\frac{-i}{2x} \right)^k, \quad (4)$$

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin \left(x - \frac{\pi}{2} n \right) \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} \frac{(-1)^k (n + 2k)!}{(2k)! (n - 2k)!} \left(\frac{1}{2x} \right)^{2k} + \right. \\ \left. + \cos \left(x - \frac{\pi}{2} n \right) \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} \frac{(-1)^k (n + 2k + 1)!}{(2k + 1)! (n - 2k + 1)!} \left(\frac{1}{2x} \right)^{2k+1} \right], \quad (5)$$

$$Y_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[-\cos \left(x - \frac{\pi}{2} n \right) \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} \frac{(-1)^k (n + 2k)!}{(2k)! (n - 2k)!} \left(\frac{1}{2x} \right)^{2k} + \right. \\ \left. + \sin \left(x - \frac{\pi}{2} n \right) \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} \frac{(-1)^k (n + 2k + 1)!}{(2k + 1)! (n - 2k + 1)!} \left(\frac{1}{2x} \right)^{2k+1} \right]. \quad (6)$$

(Symbol $[y]$ ve výrazech (5) a (6) značí celou část čísla y .)

Abychom vyjádřili elementárními funkcemi Besselovy funkce také když $n + 1/2 < 0$, tj. když n je záporné celé číslo, využijeme definičního vztahu B.3(1) Weberových funkcí. Z něho vyplývá

$$J_{-n-1/2}(x) = (-1)^{n+1} Y_{n+1/2}(x), \quad (7)$$

$$Y_{-n-1/2}(x) = (-1)^n J_{n+1/2}(x) \quad (8)$$

a ze vztahů B.4(4) dostáváme

$$H_{-n-1/2}^{(1)}(x) = (-1)^n i H_{n+1/2}^{(1)}(x), \quad H_{-n-1/2}^{(2)}(x) = (-1)^{n+1} i H_{n+1/2}^{(2)}(x). \quad (9)$$

S pomocí vztahů (3) až (9) poměrně snadno vyjádříme konečným počtem elementárních funkcí kteroukoliv Besselovu funkci $Z_{n+1/2}(x)$ při kladných i záporných celočíselných hodnotách n . Konkrétně je například

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\cos x + \frac{\sin x}{x} \right), \quad (10)$$

$$Y_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\sin x - \frac{\cos x}{x} \right), \quad (11)$$

$$H_{3/2}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp(ix) \left(-1 - \frac{i}{x}\right), \quad (12)$$

$$H_{3/2}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp(-ix) \left(-1 + \frac{i}{x}\right), \quad (13)$$

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\left(-1 + \frac{3}{x^2}\right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right], \quad (14)$$

$$Y_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) \cos x - \frac{3}{x} \sin x \right] \quad (15)$$

atd.

Vidíme tedy (viz odst. B.1.3 a vztah B.4(2)), že sférické symetrické harmonické vlny jsou v prostorech s lichou dimenzí N vyjádřeny elementárními funkcemi, zatímco v prostorech se sudou dimenzí N (např. v rovině, $N=2$) lze tyto vlny vyjádřit elementárními funkcemi jen asymptoticky, v dostatečně velkých vzdálenostech $r = \rho/k$ od středu vlny (srov. B.6(15) a B.6(16)).

B.8 Rekurentní vztah mezi Besselovými funkcemi

Rekurentní vztah

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) \quad (1)$$

odvodíme porovnáním dvou různých úprav derivace

$$J'_\nu(x) = \frac{d}{dx} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\nu + 2k)}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-1}. \quad (2)$$

(i) Součet $\nu + 2k$ v čitateli rozložíme nejprve do tvaru $(\nu + k) + k$ a derivaci (2) vyjádříme součtem dvou nekonečných řad

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\nu + k)}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-1} \right]. \quad (3)$$

V první řadě zkrátíme výraz $\nu + k$ a dostaneme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\nu + k)}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k} = J_{\nu-1}(x). \quad (4)$$

První člen ($k = 0$) druhé řady ve vztahu (3) je nulový. Budeme-li v ostatních členech krátit faktor k a zavedeme-li sčítací index $l = k - 1$, upravíme druhou řadu takto

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-1} = \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(\nu + l + 2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2l} = -J_{\nu+1}(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Dosadíme-li (4) a (5) do (3), dostaneme důležitý vztah

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)]. \quad (6)$$

(ii) Nyní vytvoříme z řady (2) pro derivaci $J'(x)$ jiné dvě řady, a to tak, že ze součtu $\nu + 2k$ v čitateli (2) vezmeme ν do jedné z řad a $2k$ do druhé. Dostaneme tak další důležitý vztah:

$$\begin{aligned}
J'_\nu(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\nu + 2k)}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-1} = \\
&= \frac{\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-1} \\
&= \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(\nu + l + 2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2l}.
\end{aligned}$$

Takže

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x). \quad (7)$$

Porovnáním pravých stran rovnic (6) a (7) se dostane rekurentní vztah (1).

Eliminujeme-li funkci $J_{\nu+1}(x)$ ze vztahů (1) a (7), dostaneme

$$J'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x). \quad (8)$$

Násobením rovnice (8) mocninou x^ν se dostane

$$x^\nu J'_\nu(x) + \nu x^{\nu-1} J_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x),$$

což lze přepsat do tvaru

$$\frac{d}{dx} \left[x^\nu J_\nu(x) \right] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \text{tj.} \quad \int x^\nu J_{\nu-1}(x) dx = x^\nu J_\nu(x) + \text{const.} \quad (9)$$

Podobně podělíme-li vztah (7) mocninou x^ν , dostaneme

$$\frac{J'_\nu(x)}{x^\nu} - \frac{\nu}{x^{\nu+1}} J_\nu(x) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu},$$

což lze přepsat do tvaru

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \quad \text{tj.} \quad \int \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} dx = -\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} + \text{const.} \quad (10)$$

Při výpočtu Fraunhoferovy difrakce na kruhovém otvoru se využije vztah (9) pro $\nu = 1$:

$$\int_0^x t J_0(t) dt = x J_1(x). \quad (11)$$

Vztahy (1), (6) až (10) platí pro všechna ν . Avšak nejen to. Tyto relace platí pro všechny Besselovy funkce, nejen pro Besselovy funkce prvního druhu. Pro neceločíselná ν jsme tuto skutečnost de facto již dokázali: Weberovy i Hankelovy funkce jsou v tomto případě lineárními kombinacemi funkcí $J_\nu(x)$ a $J_{-\nu}(x)$. Zbývá tedy ukázat, že vztahy (1), (6) až (10) platí také pro Weberovy funkce $Y_n(x)$ celočíselného indexu n . Je tomu tak, avšak dokazovat to nebudeme. Spokojíme se s konstatováním, že všechny Besselovy funkce jsou spojitou funkcí indexu ν , a že tudíž diskutované vztahy platí též pro všechny Besselovy funkce celočíselného řádu. Např. rekurentní vztah (1) píšeme ve tvaru

$$\frac{2\nu}{x} Z_\nu(x) = Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x), \quad (12)$$

kde $Z_\nu(x)$ značí kteroukoliv Besselovu funkci.

B.9 Ortogonálnost Besselových funkcí

Každé Besselově funkci $J_\nu(x)$ s reálným indexem $\nu > -1$ přísluší systém funkcí $\{J_\nu(x_{\nu,n}x), n = 1, 2, \dots\}$ ortogonální na intervalu $(0, 1)$ s vahou x . Přitom $x_{\nu,n}$ je n -tý kořen funkce $J_\nu(x)$, tj. $J_\nu(x_{\nu,n}) = 0$. Omezíme se na interval $\nu \geq 0$. (Důkaz pro $\nu \in (-1, 0)$ je složitější, neboť v tomto intervalu je $\lim_{x \rightarrow 0} J_\nu(x) \rightarrow \infty$, což komplikuje přechod od vztahu (3) ke (4) v dalším textu. Rovněž otázka konvergence řady (7) je v případě $\nu \in (-1, 0)$ komplikovaná. Podrobněji o těchto problémech pojednává Watson [1], str. 577. Naštěstí se řady (7) s $\nu \in (-1, 0)$ v aplikacích nepoužívají). Podmínka ortogonality má tvar

$$\int_0^1 J_\nu(x_{\nu,m}x) J_\nu(x_{\nu,n}x) x dx = \frac{\delta_{m,n}}{2} J_{\nu \pm 1}^2(x_{\nu,n}). \quad (1)$$

Toto tvrzení nyní dokážeme.

Zavedeme funkce

$$y_1(x) = J_\nu(\alpha x), \quad y_2(x) = J_\nu(\beta x). \quad (2)$$

Zřejmě platí

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x) = \alpha \frac{dJ_\nu(\alpha x)}{d(\alpha x)} = \alpha J_\nu'(\alpha x), \\ y_2'(x) &= \beta J_\nu'(\beta x), \\ y_1''(x) &= \alpha^2 J_\nu''(\alpha x), \\ y_2''(x) &= \beta^2 J_\nu''(\beta x). \end{aligned}$$

Funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou řešením diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 y_1''(x) + x y_1'(x) + (\alpha^2 x^2 - \nu^2) y_1(x) &= 0, \\ x^2 y_2''(x) + x y_2'(x) + (\beta^2 x^2 - \nu^2) y_2(x) &= 0. \end{aligned}$$

(Přesvědčíme se o tom např. tak, že do nich dosadíme za y_1 a y_2 výrazy (2). Dostaneme tím Besselovu diferenciální rovnici s nezávisle proměnnou αx resp. βx .) Znásobíme-li první z posledně uvedených rovnic funkcí $y_2(x)/x$, druhou funkcí $y_1(x)/x$ a odečteme-li od sebe takto vzniklé rovnice, dostaneme

$$x(y_1'' y_2 - y_1 y_2'') + (y_1' y_2 - y_1 y_2') + (\alpha^2 - \beta^2) x y_1 y_2 = 0,$$

tj.

$$[x(y_1' y_2 - y_1 y_2')] + (\alpha^2 - \beta^2) x y_1 y_2 = 0.$$

Integrace této rovnice dává vztah

$$(\beta^2 - \alpha^2) \int_0^1 y_1(x) y_2(x) x dx = \left\{ x [y_1'(x) y_2(x) - y_1(x) y_2'(x)] \right\}_{x=0}^{x=1}. \quad (3)$$

Dosadíme-li do této rovnice Besselovy funkce a uvážíme-li, že $J_\nu(0) = 0$ pro $\nu > 0$ a $J_0'(0) = 0$, dostaneme

$$\int_0^1 J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) x dx = \frac{\alpha J_\nu'(\alpha) J_\nu(\beta) - \beta J_\nu(\alpha) J_\nu'(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (4)$$

Zvolíme-li za α a β kořeny Besselovy funkce J_ν , tj.

$$\alpha = x_{\nu,m}, \quad \beta = x_{\nu,n}, \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

je zřejmé, že čitatel výrazu na pravé straně rovnice (4) je roven nule, a tím je dokázáno tvrzení (1) pro $m \neq n$ (tj. $\alpha \neq \beta$). V případě, že je v rovnici (4) $\alpha = \beta$, klademe $\alpha = x_{\nu,n}$, $\beta = x_{\nu,n} + \epsilon$ a vypočítáme limity obou stran rov. (4) pro $\epsilon \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 J_\nu^2(x_{\nu,n}x) x \, dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x_{\nu,n} J'_\nu(x_{\nu,n}) J_\nu(x_{\nu,n} + \epsilon) - (x_{\nu,n} + \epsilon) J_\nu(x_{\nu,n}) J'_\nu(x_{\nu,n} + \epsilon)}{(x_{\nu,n} + \epsilon)^2 - x_{\nu,n}^2} = \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x_{\nu,n} J'_\nu(x_{\nu,n}) J_\nu(x_{\nu,n} + \epsilon)}{(x_{\nu,n} + \epsilon)^2 - x_{\nu,n}^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x_{\nu,n} J'_\nu(x_{\nu,n}) J_\nu(x_{\nu,n}) + x_{\nu,n} \epsilon J_\nu''(x_{\nu,n})}{2x_{\nu,n} \epsilon + \epsilon^2} = \\
&= \frac{1}{2} J_\nu''(x_{\nu,n}).
\end{aligned}$$

Ze vztahů B.8(7) a B.8(8) vyplývá

$$J'_\nu(x_{\nu,n}) = -J_{\nu+1}(x_{\nu,n}) = J_{\nu-1}(x_{\nu,n}). \quad (5)$$

Takže

$$\int_0^1 J_\nu^2(x_{\nu,n}x) x \, dx = \frac{1}{2} J_{\nu\pm 1}^2(x_{\nu,n}), \quad (6)$$

a tím jsme dokázali tvrzení (1) pro $m = n$.

Ortogonalní systém funkcí $\{J_\nu(x_{\nu,n}x), n = 1, 2, \dots\}$ je úplný, a proto můžeme každou funkci $f(x)$, která má na intervalu $(0, 1)$ konečnou variaci a pro kterou existuje integrál $\int_0^1 |f(x)| \sqrt{x} \, dx$, rozvést do Fourierovy–Besselovy řady

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu,n} J_\nu(x_{\nu,n}x), \quad x \in (0, 1), \quad \nu \geq 0 \quad (7)$$

s koeficienty

$$a_{\nu,n} = \frac{2}{J_{\nu\pm 1}^2(x_{\nu,n})} \int_0^1 f(x) J_\nu(x_{\nu,n}x) x \, dx. \quad (8)$$

Zavedeme-li v integrálu (1) substituci $x \rightarrow x/a$, dostaneme

$$\int_0^a J_\nu\left(x_{\nu,n} \frac{x}{a}\right) J_\nu\left(x_{\nu,m} \frac{x}{a}\right) x \, dx = \delta_{m,n} \frac{a^2}{2} J_{\nu\pm 1}^2(x_{\nu,n}), \quad (9)$$

což je podmínka ortogonalit pro interval $(0, a)$. Chceme-li tedy rozvinout funkci $f(x)$ na intervalu $(0, a)$, použijeme Fourierova–Besselova rozvoje ve tvaru

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_\nu\left(x_{\nu,n} \frac{x}{a}\right) \quad (10)$$

s koeficienty

$$A_n = \frac{2}{a^2 J_{\nu\pm 1}^2(x_{\nu,n})} \int_0^a f(x) J_\nu\left(x_{\nu,n} \frac{x}{a}\right) x \, dx. \quad (11)$$

B.10 Příklad

Kmitající kruhová membrána upevněná na obvodě [10].

Výchylka $\Psi(r, \varphi, t)$ v jednotlivých bodech r, φ membrány splňuje vlnovou rovnici

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Okrajová podmínka:

$$\Psi(a, \varphi, t) = 0. \quad (2)$$

Počáteční podmínky:

$$\Psi(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi(r, \varphi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(r, \varphi). \quad (4)$$

Fourierova metoda separace proměnných: $\Psi(r, \varphi, t) = R(r)\Phi(\varphi)\tau(t)$

$$\underbrace{\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R}}_{-k^2 + n^2/r^2} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi}}_{-n^2/r^2} - \underbrace{\frac{1}{v^2} \frac{\tau''}{\tau}}_{-k^2} = 0, \quad (5)$$

$$\tau'' + k^2 v^2 \tau = 0, \quad (6)$$

$$\Phi'' + n^2 \Phi = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ — jednoznačnost} \quad (7)$$

$$r^2 R'' + r R' + (k^2 r^2 - n^2) R = 0. \quad (8)$$

Formálně nejobecnější zápis jednoho z řešení vlnové rovnice, jejichž superpozicí hledáme smysluplné řešení:

$$\Psi_{n,?}(r, \varphi, t) = [C_5 J_n(kr) + C_6 Y_n(kr)] [C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)] [C_1 \cos(kvt) + C_2 \sin(kvt)].$$

Ohraničenost řešení $\Rightarrow C_6 = 0$. Bez újmy lze položit $C_5 = 1$.

Okrajová podmínka $\Rightarrow J_n(ka) = 0$, to znamená $ka = x_{n,m}$. Jsou tedy možné jen hodnoty $k_{n,m} = x_{n,m}/a$. Úloha je řešitelná při dvou posloupnostech vlastních čísel:

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$k_{n,m} = \frac{x_{n,m}}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Označíme

$$\omega_{n,m} = k_{n,m} v = \frac{x_{n,m}}{a} v \quad \text{— vlastní frekvence membrány.} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m}(r, \varphi, t) &= J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a} r\right) [C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)] [C_1 \cos(\omega_{n,m} t) + C_2 \sin(\omega_{n,m} t)] = \\ &= J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a} r\right) \cos(n\varphi) [C_1 C_3 \cos(\omega_{n,m} t) + C_2 C_3 \sin(\omega_{n,m} t)] + \\ &+ J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a} r\right) \sin(n\varphi) [C_1 C_4 \cos(\omega_{n,m} t) + C_2 C_4 \sin(\omega_{n,m} t)]. \end{aligned}$$

V zájmu zápisu superpozice těchto řešení označíme

$$C_1 C_3 = A_{n,m}, \quad C_2 C_3 = B_{n,m}, \quad C_1 C_4 = C_{n,m}, \quad C_2 C_4 = D_{n,m}.$$

Superpozice řešení $\Psi(r, \varphi, t)$:

$$\begin{aligned} \Psi(r, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a} r\right) \left\{ \cos(n\varphi) [A_{n,m} \cos(\omega_{n,m} t) + B_{n,m} \sin(\omega_{n,m} t)] + \right. \\ &\quad \left. + \sin(n\varphi) [C_{n,m} \cos(\omega_{n,m} t) + D_{n,m} \sin(\omega_{n,m} t)] \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Koeficienty $A_{n,m}, \dots, D_{n,m}$ vyplývají z počátečních podmínek:

$$\Psi(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} J_{n'}\left(\frac{x_{n',m'}}{a} r\right) [A_{n',m'} \cos(n'\varphi) + C_{n',m'} \sin(n'\varphi)]. \quad (13)$$

Násobením rovnice (13) výrazem $r J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a} r\right) \cos(n\varphi)$ a integrací dostaneme

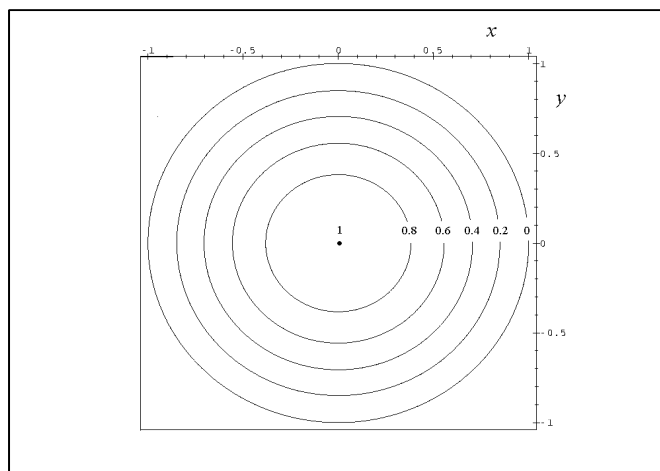
$$\int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) r J_n \left(\frac{x_{n,m}}{a} r \right) \cos(n\varphi) d\varphi dr = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \int_0^a J_{n'} \left(\frac{x_{n',m'}}{a} r \right) J_n \left(\frac{x_{n,m}}{a} r \right) r dr \times \\ \times \left[A_{n',m'} \int_0^{2\pi} \cos(n'\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi + C_{n',m'} \int_0^{2\pi} \sin(n'\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi \right]. \quad (14)$$

Avšak

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(n'\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos(n'\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi &= 0, \quad n' \neq n. \\ &= \pi, \quad n' = n \neq 0. \\ &= 2\pi, \quad n' = n = 0, \end{aligned}$$

tj., když je integrál (14) nenulový, je $n' = n$. Takže zbývá použít hodnoty integrálu

$$\begin{aligned} \int_0^a J_n \left(\frac{x_{n,m'}}{a} r \right) J_n \left(\frac{x_{n,m}}{a} r \right) r dr &= \frac{a^2}{2} J_{n\pm 1}^2(x_{n,m}), \quad m = m', \\ &= 0, \quad m \neq m'. \end{aligned}$$



Obrázek 1: Graf funkce $\psi_{0,1}(r, \varphi) = J_0(\frac{x_{0,1}}{a} r)$.

Je tedy

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_n \left(\frac{x_{n,m}}{a} r \right) r \cos(n\varphi) d\varphi dr &= A_{0,m} \pi a^2 J_1^2(x_{0,m}), \quad \text{když } n = 0, \\ &= A_{n,m} \frac{\pi a^2}{2} J_{n\pm 1}^2(x_{n,m}), \quad \text{když } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Koeficienty $A_{n,m}$ tedy dává výraz

$$A_{n,m} = \frac{2}{\pi a^2 \epsilon_n J_{n\pm 1}^2(x_{n,m})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_n \left(\frac{x_{n,m}}{a} r \right) r \cos(n\varphi) d\varphi dr, \quad (15)$$

v němž

$$\begin{aligned}\epsilon_n &= 1, \text{ když } n = 1, 2, \dots, \\ &= 2, \text{ když } n = 0.\end{aligned}$$

Obdobným způsobem, tj. vynásobením rovnice (13) funkcí $r J_n(x_{n,m} r/a) \sin(n\varphi)$ a integrací, dostaneme

$$C_{n,m} = \frac{2}{\pi a^2 \epsilon_n J_{n\pm 1}^2(x_{n,m})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a} r\right) r \sin(n\varphi) d\varphi dr. \quad (16)$$

Derivováním rovnice (12) podle času dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(r, \varphi, t)}{\partial t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{n,m} J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a} r\right) \left\{ \cos(n\varphi) [-A_{n,m} \sin(\omega_{n,m} t) + B_{n,m} \cos(\omega_{n,m} t)] + \right. \\ &\quad \left. + \sin(n\varphi) [-C_{n,m} \sin(\omega_{n,m} t) + D_{n,m} \cos(\omega_{n,m} t)] \right\}. \quad (17)\end{aligned}$$

Takže

$$\left. \frac{\partial \Psi(r, \varphi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(r, \varphi) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \omega_{n',m'} J_{n'}\left(\frac{x_{n',m'}}{a} r\right) [B_{n',m'} \cos(n'\varphi) + D_{n',m'} \sin(n'\varphi)]. \quad (18)$$

Tato rovnice je obdobná rovnici (13) a stejným způsobem, kterým jsme získali koeficienty $A_{n,m}$, $C_{n,m}$ z rov. (13), dostaneme z rovnice (18) koeficienty $B_{n,m}$ a $D_{n,m}$:

$$B_{n,m} = \frac{2}{\pi a^2 \epsilon_n \omega_{n,m} J_{n\pm 1}^2(x_{n,m})} \int_0^a \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a} r\right) r \cos(n\varphi) d\varphi dr, \quad (19)$$

$$D_{n,m} = \frac{2}{\pi a^2 \epsilon_n \omega_{n,m} J_{n\pm 1}^2(x_{n,m})} \int_0^a \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a} r\right) r \sin(n\varphi) d\varphi dr. \quad (20)$$

Výrazy (15), (16), (19) a (20) jsou určeny koeficienty řešení (12). Je hodno pozoru, že kdyby byla počáteční podmínka $\left. \frac{\partial \Psi(r, \varphi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$, bylo by $B_{n,m} = D_{n,m} = 0$.

Vraťme se však k rovnici (12). Uvedli jsme již, že kruhová membrána kmitá s diskretním spektrem vlastních frekvencí $\omega_{n,m} = \frac{x_{n,m}}{a} v$. Tyto frekvence jsou určeny mechanickými (v) a geometrickými (a) vlastnostmi membrány. Řešení (12) můžeme dále upravit do dvou formálně různých výrazů:

- (i) První akcentuje harmonickou závislost vlastních funkcí příslušejících jednotlivým vlastním frekvencím $\omega_{n,m}$ na čase.

$$\Psi(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a} r\right) [a_{n,m}(n\varphi) \cos(\omega_{n,m} t) + b_{n,m}(n\varphi) \sin(\omega_{n,m} t)] = \quad (21)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a} r\right) c_{n,m}(n\varphi) \cos[\omega_{n,m} t + \gamma_{n,m}(n\varphi)], \quad (22)$$

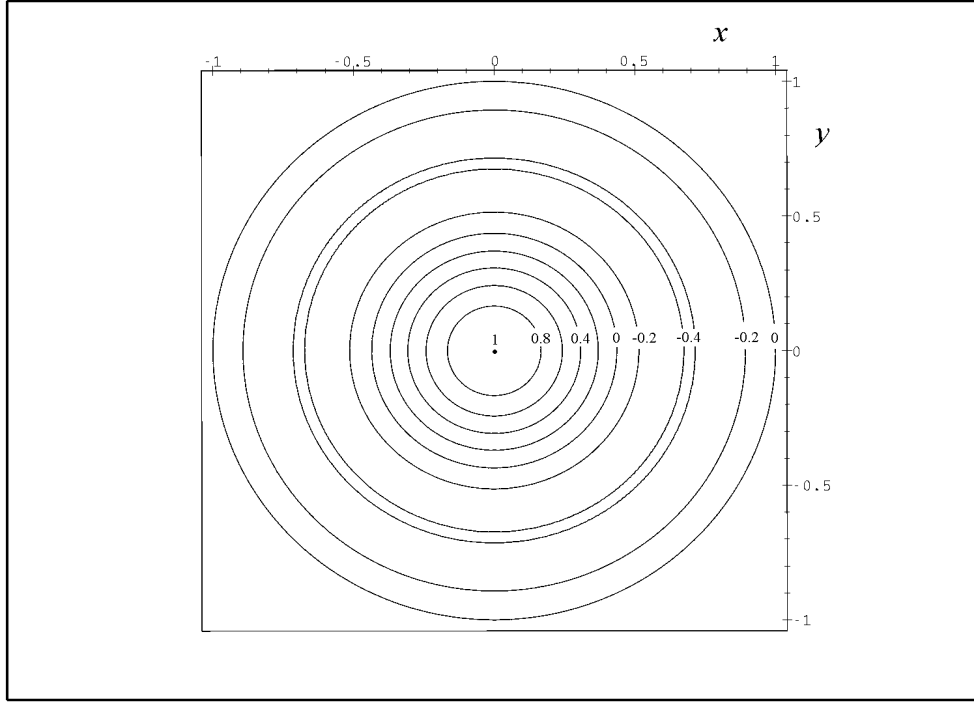
kde funkce

$$a_{n,m}(n\varphi) = A_{n,m} \cos(n\varphi) + C_{n,m} \sin(n\varphi), \quad (23)$$

$$b_{n,m}(n\varphi) = B_{n,m} \cos(n\varphi) + D_{n,m} \sin(n\varphi), \quad (24)$$

$$c_{n,m}(n\varphi) = [(A_{n,m}^2 + B_{n,m}^2) \cos^2(n\varphi) + (C_{n,m}^2 + D_{n,m}^2) \sin^2(n\varphi) + (A_{n,m} C_{n,m} + B_{n,m} D_{n,m}) \sin(2n\varphi)]^{1/2} \quad (25)$$

$$+ (A_{n,m} C_{n,m} + B_{n,m} D_{n,m}) \sin(2n\varphi)]^{1/2} \quad (26)$$



Obrázek 2: Graf funkce $\psi_{0,2}(r, \varphi) = J_0(\frac{x_{0,2}}{a}r)$.

$$\gamma_{n,m}(n\varphi) = -\operatorname{Arctg} \frac{B_{n,m} \cos(n\varphi) + D_{n,m} \sin(n\varphi)}{A_{n,m} \cos(n\varphi) + C_{n,m} \sin(n\varphi)} \quad (27)$$

nezávisí na čase. Z výrazu (22) je vidět, že pro výsledný tvar funkce $\Psi(r, \varphi, t)$ jsou důležité nejen amplitudy $J_n(\frac{x_{n,m}}{a}r)$ $c_{n,m}(n\varphi)$ vlastních funkcí příslušející vlastním frekvencím $\omega_{n,m}$, ale také počáteční fáze $\gamma_{n,m}(n\varphi)$. Jinými slovy, „kvalita“ zvuku bubnu závisí nejen na amplitudě jednotlivých složek, ale i na jejich fázi.

- (ii) Jiná úprava řešení (12) vede k výrazu, který ukazuje závislost vlastních funkcí příslušejících jednotlivým vlastním frekvencím $\omega_{n,m}$ na souřadnicích r, φ :

$$\Psi(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a}r\right) d_{n,m}(\omega_{n,m}t) \cos[n\varphi + \delta_{n,m}(\omega_{n,m}t)], \quad (28)$$

kde funkce

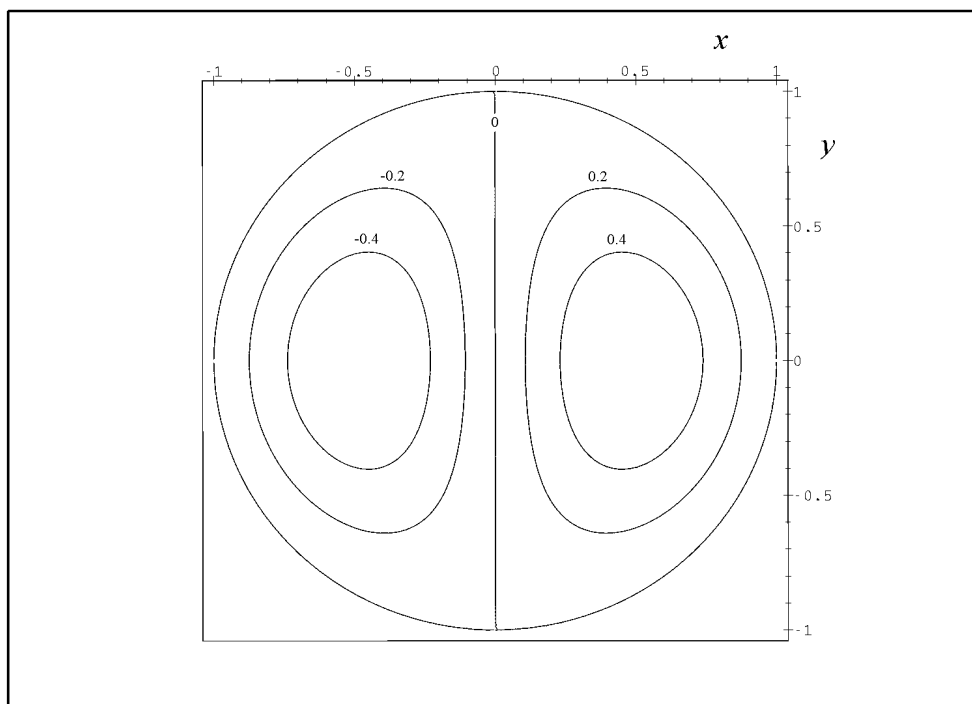
$$d_{n,m}(\omega_{n,m}t) = [(A_{n,m}^2 + C_{n,m}^2) \cos^2(\omega_{n,m}t) + (B_{n,m}^2 + D_{n,m}^2) \sin^2(\omega_{n,m}t) + 2(A_{n,m}B_{n,m} + C_{n,m}D_{n,m}) \cos(\omega_{n,m}t) \sin(\omega_{n,m}t)]^{1/2}, \quad (29)$$

$$\delta_{n,m}(\omega_{n,m}t) = -\operatorname{Arctg} \frac{C_{n,m} \cos(\omega_{n,m}t) + D_{n,m} \sin(\omega_{n,m}t)}{A_{n,m} \cos(\omega_{n,m}t) + B_{n,m} \sin(\omega_{n,m}t)}. \quad (30)$$

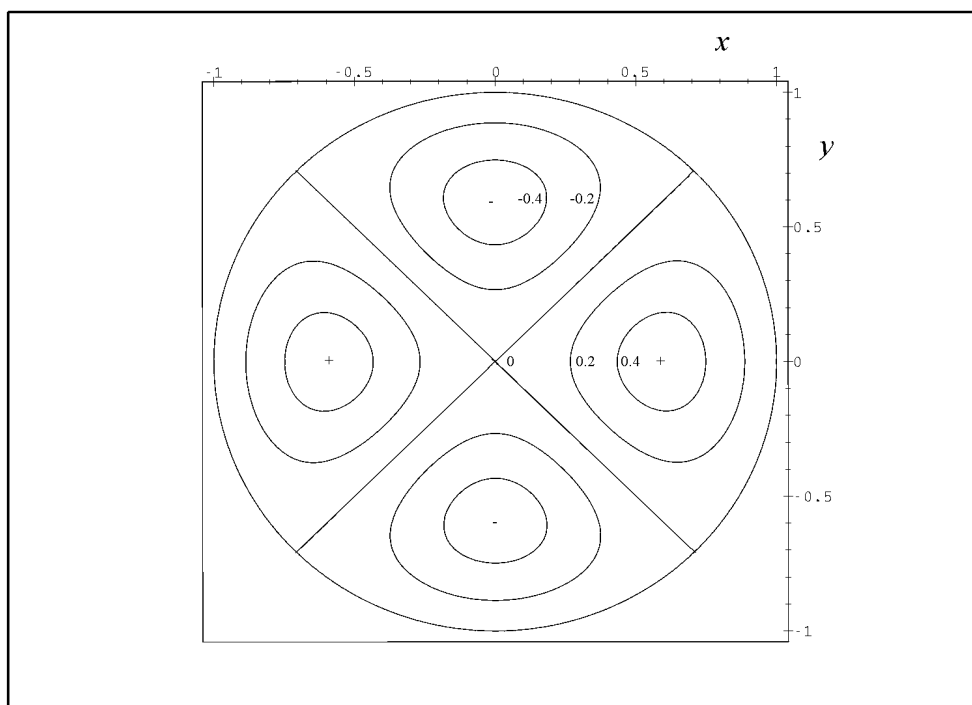
nezávisí na souřadnicích r, φ .

Funkce

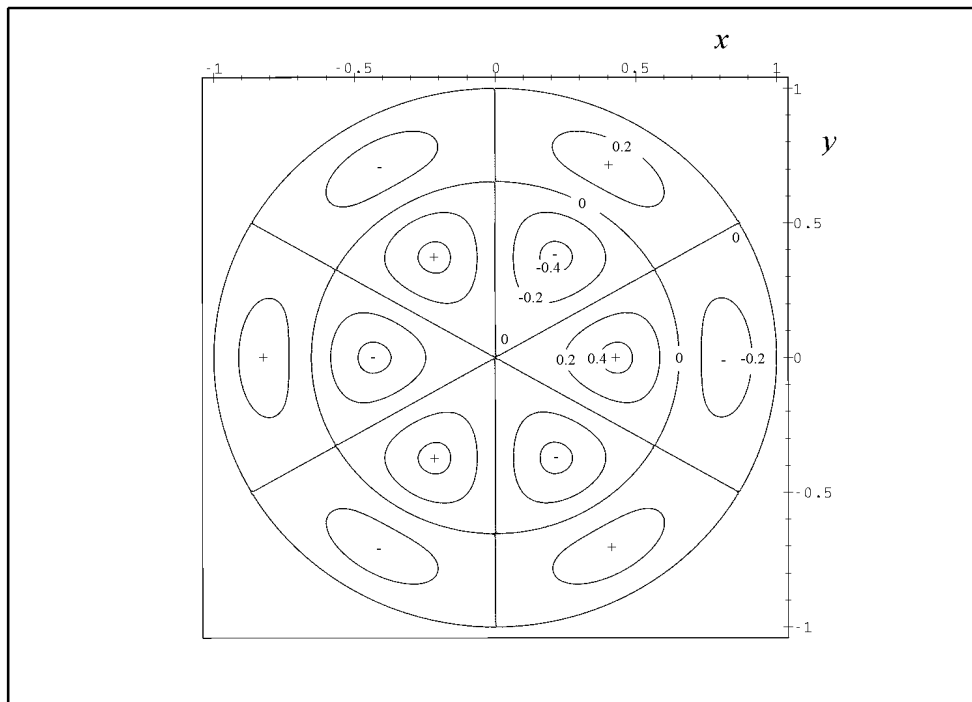
$$\psi_{n,m}(r, \varphi) = J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a}r\right) \cos(n\varphi) \quad (31)$$



Obrázek 3: Graf funkce $\psi_{1,1} = J_1(\frac{x_{1,1}}{a}r) \cos \varphi$.



Obrázek 4: Graf funkce $\psi_{2,1}(r, \varphi) = J_2(\frac{x_{2,1}}{a}r) \cos 2\varphi$.



Obrázek 5: Graf funkce $\psi_{3,2}(r, \varphi) = J_3(\frac{x_{3,2}}{a}r) \cos 3\varphi$.

nezávisí na čase. Nazýváme je módy. Je zřejmé, že módy

$$\psi_{0,m}(r, \varphi) = J_0\left(\frac{x_{0,m}}{a}r\right)$$

jsou rotačně symetrické a módy $\psi_{n,m}(r, \varphi)$, $n \geq 1$, mají n -četnou symetrii vzhledem k pólu polárních souřadnic. Grafy několika módů $\psi_{n,m}(r, \varphi)$ jsou na obrázcích 1 až 5. (V nich je $x = (r/a) \cos \varphi$, $y = (r/a) \sin \varphi$.)

B.11 Vytvořující funkce

V odst. B.1.2 jsme ukázali, že rozložíme-li řešení vlnové rovnice v polárních souřadnicích do složek s n -četnou symetrií podle pólu $\rho = 0$, musí radiální část těchto složek splňovat Besselovu rovnici s celočíselným n . Z toho vyplývá zvláštní důležitost Besselových funkcí s celočíselným indexem. Na příkladu v předcházejícím odstavci jsme důležitost funkcí $J_n(x)$ ilustrovali. Budeme se proto v následujících třech odstavcích zabývat funkcemi $J_n(x)$ s celočíselným indexem n .

V teorii speciálních funkcí mají velkou důležitost tzv. vytvořující funkce $w(x, t)$. Jsou to funkce, jejichž Laurentova řada v proměnné t má koeficienty vyjádřeny příslušnou speciální funkcí. (Mluvíme o Laurentově řadě, neboť je účelné považovat proměnnou t za komplexní (viz např. rov. (1) v následujícím odst. B.12).) Ukážeme, že v případě Besselových funkcí má vytvořující funkce tvar

$$w(x, t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right], \quad t \neq 0 \quad (1)$$

a že platí

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n, \quad t \neq 0. \quad (2)$$

Abychom dokázali tvrzení (2), budeme faktorizovat levou stranu, rozvineme jednotlivé činitele do mocninných řad a vytvoříme dvojnou řadu:

$$\begin{aligned}
\exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] &= \exp \left(\frac{x}{2} t \right) \exp \left(-\frac{x}{2t} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(xt)^j}{2^j j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k t^{-k}}{2^k k!} = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{j! k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{j+k} t^{j-k}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Protože jednoduché řady jsou absolutně konvergentní, je také dvojná řada absolutně konvergentní a můžeme ji přerovnat podle mocnin t . Tím dostaneme rozvoj typu (2) platný pro všechna x . Zavedeme tedy sčítací index $n = j - k$ a dostaneme

$$\exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2k} t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n. \tag{4}$$

Okolnost, že sčítací index n nabývá hodnot všech kladných i záporných celých čísel vyžaduje vysvětlení: Rozepišme dvojnou řadu (3) do řádků, v každém z nichž je konstantní hodnota indexu j a index k se mění od nuly do nekonečna.

$$\begin{aligned}
\exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] &= 1 - \frac{x}{2} t^{-1} + \frac{x^2}{8} t^{-2} \pm \dots + \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k t^{-k} + \dots \\
&+ \frac{x}{2} t - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} t^{-1} \pm \dots + \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{1+k} t^{1-k} + \dots \\
&+ \frac{x^2}{8} t^2 - \frac{x^3}{16} t + \frac{x^4}{64} \pm \dots + \frac{(-1)^k}{2k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2+k} t^{2-k} + \dots \\
&\dots \\
&+ \frac{1}{j!} \left(\frac{x}{2} \right)^j t^j - \frac{1}{j!} \left(\frac{x}{2} \right)^{j+1} t^{j-1} + \frac{1}{2j!} \left(\frac{x}{2} \right)^{j+2} t^{j-2} \pm \dots + \frac{(-1)^k}{j! k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{j+k} t^{j-k} + \dots \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

Sečteme nyní tuto dvojnou řadu nejprve v „úhlopříčných“ směrech, tj. při neměnných mocninách $t^{j-k} = t^n$. Je zřejmé, že součet zahrnující členy v „hlavní úhlopříčce“ a pod ní, tj. členy s $n \geq 0$, lze napsat ve tvaru dvojně řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2k} t^n. \tag{5}$$

Naproti tomu členy nad „hlavní úhlopříčkou“, tj. členy s $n \leq -1$, lze sečíst ve tvaru dvojně řady

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2k} t^n. \tag{6}$$

Definujeme-li však $1/m! = 1/\Gamma(m+1) = 0$ pro $m = -1, -2, \dots$, můžeme k vnitřní řadě výrazu (6) přidat nulové členy s $n+k \leq -1$ (neboť $n \leq -1$) a psát dvojnou řadu (6) ve tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2k} t^n. \tag{7}$$

Sečtením (5) a (7) dostáváme dvojnou řadu ve (4).

Vytvořující funkci lze použít k odvození mnoha relací, ovšem jen pro Besselovy funkce s celočíselným indexem n . Uvedeme dva příklady. V prvním využijeme toho, že pro vytvořující funkci (1) platí $w(x, t) = w(x, -1/t)$. Musí tedy také platit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) (-1/t)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(x) t^{-n}.$$

Porováním koeficientů u týchž mocnin proměnné t dostáváme

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

tj. vztah B.2(22).

Ve druhém příkladě derivováním vztahu (2) podle x dostaneme

$$\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) t^n,$$

tj.

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ J_n(x) t^{n+1} - J_n(x) t^{n-1} - 2J'_n(x) t^n \} = 0.$$

Položíme-li koeficient u mocniny t^n roven nule, dostaneme vztah

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x),$$

který jsme pro obecnou hodnotu indexu odvodili již v odst. B.8 (srov. rovnici B.8(6)).

Odvodíme ještě tzv. součtový teorém pro Besselovy funkce. Vyplyvá z této vlastnosti vytvořující funkce:

$$w(x+y, t) = w(x, t)w(y, t),$$

tj.

$$\exp \left[\frac{x+y}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] \exp \left[\frac{y}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right].$$

Použijeme-li pro jednotlivé exponenciální funkce rozvoj (2), dostaneme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) t^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_l(y) t^{m+l}.$$

Porovnáním koeficientů u mocnin t^n dostaneme součtový vzorec

$$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y). \quad (8)$$

Chceme-li se omezit jen na Besselovy funkce celého nezáporného řádu, musíme pravou stranu rov. (8) upravit. Předpokládáme, že $n \geq 0$ a rozčleníme řadu (8) na tři části:

$$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y) = \sum_{m=-\infty}^{-1} J_m(x) J_{n-m}(y) + \sum_{m=0}^n J_m(x) J_{n-m}(y) + \sum_{m=n+1}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y).$$

První a třetí sčítanec upravíme s použitím vztahu B.2(22):

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{-1} J_m(x) J_{n-m}(y) &= \sum_{m=1}^{\infty} J_{-m}(x) J_{n+m}(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_m(x) J_{n+m}(y), \\ \sum_{m=n+1}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y) &= \sum_{m=1}^{\infty} J_{n+m}(x) J_{-m}(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{n+m}(x) J_m(y). \end{aligned}$$

Vztah (8) pak můžeme napsat ve tvaru

$$J_n(x+y) = \sum_{m=0}^n J_m(x) J_{n-m}(y) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [J_m(x) J_{n+m}(y) + J_{n+m}(x) J_m(y)], \quad (9)$$

v němž, je-li $n \geq 0$, se vyskytují Besselovy funkce pouze nezáporného řádu.

Ze vztahů (8) resp. (9) lze získat mnoho zajímavých zvláštních případů. Např. pro $n = 0$, $x = y$ dostáváme

$$J_0(2x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m^2(x) = J_0^2(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_m^2(x). \quad (10)$$

Podobně lze odvodit

$$J_n(x-y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{m-n}(y), \quad y \leq x, \quad (11)$$

resp.

$$J_n(x-y) = (-1)^n \left\{ \sum_{m=0}^n (-1)^m J_m(x) J_{n-m}(y) + \sum_{m=1}^{\infty} [J_m(x) J_{n+m}(y) + J_{n+m}(x) J_m(y)] \right\}, \quad y \leq x. \quad (12)$$

Pro $n = 0$ je

$$J_0(x-y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(x) J_m(y) = J_0(x) J_0(y) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(x) J_m(y). \quad (13)$$

Speciálně pro $x = y$ dostáváme z (13)

$$1 = J_0^2(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m^2(x) \quad (14)$$

a ze vztahu (14) vyplývají odhady

$$|J_0(x)| \leq 1, \quad |J_n(x)| < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Existují ovšem mnohem obecnější součtové vzorce, než jsou (8) resp. (11), a to jak co do indexu, tak co do kombinace proměnných Besselových funkcí (viz např. [1], kap. 11, [3], vztahy 8.53).

B.12 Řady Besselových funkcí

Příkladem řady Besselových funkcí je Maclaurinova řada B.11(2), tj. sama vytvářející funkce. Speciální volbou proměnné t však dostaneme mnoho různých řad, které jsou důležité v aplikacích. Např. položíme-li ve vytvářející funkci

$$t = \exp(\pm i\varphi), \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{t} = \exp(\mp i\varphi), \quad t - \frac{1}{t} = \pm 2i \sin \varphi, \quad (1)$$

vyplývá z B.11(2)

$$\exp(\pm ix \sin \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \exp(\pm in\varphi). \quad (2)$$

Nahrazením φ výrazem $\varphi + \pi/2$ dostaneme z rov. (2)

$$\exp(\pm ix \cos \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pm i)^n J_n(x) \exp(\pm in\varphi). \quad (3)$$

Využitím rov. B.2(22) můžeme přepsat rov. (2) a (3) do tvaru

$$\exp(\pm ix \sin \varphi) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\varphi) \pm 2i \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin[(2n-1)\varphi], \quad (4)$$

$$\exp(\pm ix \cos \varphi) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \cos(2n\varphi) \pm 2i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} J_{2n-1}(x) \cos[(2n-1)\varphi]. \quad (5)$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí rovnic (4) a (5) dostáváme

$$\cos(x \sin \varphi) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\varphi), \quad (6)$$

$$\sin(x \sin \varphi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin[(2n-1)\varphi], \quad (7)$$

$$\cos(x \cos \varphi) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \cos(2n\varphi), \quad (8)$$

$$\sin(x \cos \varphi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} J_{2n-1}(x) \cos[(2n-1)\varphi]. \quad (9)$$

Řady (2) až (9) se někdy nazývají Jacobiovy rozvoje.

Speciální volbou proměnné φ lze získat řadu zajímavých identit. Např. pro $\varphi = 0$ vyplývá z (8)

$$\cos x = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x), \quad (10)$$

z (9)

$$\frac{\sin x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} J_{2n-1}(x) \quad (11)$$

a ze (4) nebo (6)

$$1 = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x). \quad (12)$$

Výrazy na levých stranách rovnic (2) až (9) jsou periodickými funkcemi proměnné φ s periodou 2π a pravé strany těchto rovnic jsou Fourierovými řadami těchto výrazů. Toho využijeme v následujícím odst. B.13 k odvození integrálních reprezentací funkcí $J_n(x)$.

V optice se s řadami typu (2) až (9) setkáváme např. při popisu Fraunhoferových difrakčních jevů na stínících s m -čtetnou symetrií kolem pólu polárních souřadnic. Ilustrují to příklady 13.6 a 13.7 v kapitole o Fourierově transformaci v polárních souřadnicích. V teorii komunikací jsou tyto řady užitečné při analýze funkcí charakterizujících fázovou modulaci.

B.13 Integrální reprezentace funkcí $J_n(x)$

Vyjdeme z rovnice B.12(2) pro $\exp(-ix \sin \varphi)$, označíme symbolem n' sčítací index v řadě B.12(2) a znásobíme takto upravenou rovnici B.12(2) funkcí $\exp(in\varphi)$. Dostaneme

$$\exp[i(n\varphi - x \sin \varphi)] = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} J_{n'}(x) \exp[i(n - n')\varphi]. \quad (1)$$

Výrazy na obou stranách rovnice (1) jsou periodickými funkcemi proměnné φ s periodou 2π . Integrujme rovnici (1) podle proměnné φ v intervalu $\langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle$, kde α je libovolné reálné číslo. Vzhledem k tomu, že

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \exp[i(n - n')\varphi] d\varphi = 2\pi \delta_{n,n'}, \quad (2)$$

dostáváme tak z rov. (1) integrální reprezentaci

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \exp[i(n\varphi - x \sin \varphi)] d\varphi. \quad (3)$$

Této reprezentace a jí příbuzných integrálních reprezentací se často využívá při výpočtech difrakčního integrálu. Uvedeme proto tyto příbuzné integrální reprezentace, které vzniknou různými obměnami proměnné φ . Především lze (substitucí $\varphi \rightarrow -\varphi$) nahlédnout, že vztah (3) lze zobecnit do tvaru

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \exp[\pm i(n\varphi - x \sin \varphi)] d\varphi. \quad (4)$$

Substitucemi $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ resp. $\varphi \rightarrow \varphi \pm \pi/2$ dostaneme další modifikace integrální reprezentace (4)

$$J_n(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \exp[\pm i(n\varphi + x \sin \varphi)] d\varphi, \quad (5)$$

resp.

$$J_n(x) = \frac{(\pm i)^n}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \exp[\pm i(n\varphi \mp x \cos \varphi)] d\varphi. \quad (6)$$

Funkce $J_n(x)$ je reálná. Z rovnic (4) a (5) proto plyne

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi, \quad (7)$$

$$J_n(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \cos(n\varphi + x \sin \varphi) d\varphi. \quad (8)$$

Reálná část rovnice (1) má tvar

$$\cos(n\varphi - x \sin \varphi) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} J_{n'}(x) \cos[(n - n')\varphi]. \quad (9)$$

Integrujeme-li rovnici (9) v intervalu $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ a uvažíme-li, že

$$\int_0^{\pi} \cos[(n - n')\varphi] d\varphi = \pi \delta_{n,n'},$$

dostaneme integrální reprezentaci typu

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi, \quad (10)$$

již bychom mohli rovněž obměňovat. Nebudeme to dělat.

Na závěr uvedeme, že existují integrální reprezentace zde uvedeného typu i pro Besselovy funkce neceločíselného indexu, jsou však komplikované (viz např. [3], 8.411.13 a 8.411.14). V následujícím odstavci odvodíme integrální reprezentaci jiného typu, která však platí i pro neceločíselné hodnoty ν indexu Besselových funkcí.

B.14 Poissonova integrální reprezentace Besselových funkcí $J_{\nu}(x)$

Dokážeme nyní, že platí

$$J_{\nu}(x) = \frac{(x/2)^{\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\nu-1/2} \exp(ixt) dt, \quad x > 0, \quad \nu \geq -1/2, \quad (1)$$

tj.

$$J_{\nu}(x) = \frac{x^{\nu}}{2^{\nu-1} \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^1 (1 - t^2)^{\nu-1/2} \cos(xt) dt, \quad x > 0, \quad \nu \geq -1/2. \quad (2)$$

Za tím účelem upravíme integrál v rov. (1) a rozvineme $\cos(xt)$ v mocninou řadu:

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \exp(ixt) dt = 2 \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos(xt) dt = \\
&= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} t^{2k} dt.
\end{aligned}$$

Zavedeme substituci $t^2 = u$ a budeme integrál upravovat tak, abychom ho vyjádřili funkcí beta (srov. kapitulu o funkci gamma, vztah (22)):

$$\begin{aligned}
I(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \int_0^1 (1-u)^{\nu-1/2} u^{k-1/2} du = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \int_0^1 (1-u)^{(\nu+1/2)-1} u^{(k+1/2)-1} du = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} B(\nu+1/2, k+1/2).
\end{aligned}$$

Funkci beta nyní vyjádříme prostřednictvím funkcí gamma ($B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$) a využijeme vztahu $\Gamma(k+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}(2k)!}{k!2^{2k}}$. Tak dostaneme

$$\begin{aligned}
I(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1/2)\Gamma(k+1/2)}{(2k)! \Gamma(\nu+k+1)} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1/2) \sqrt{\pi}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \\
&= \sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.
\end{aligned}$$

V poslední řadě poznáváme funkci $J_{\nu}(x)$. Tím jsou tvrzení (1) a (2) dokázána.

Jednoduchý tvar má Poissonovo vyjádření funkcí $J_0(x)$ a $J_1(x)$:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad (3)$$

$$J_1(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cos(xt) dt. \quad (4)$$

Poznámka o historii Airyho funkce funkce $\frac{2J_1(x)}{x}$:

G. B. Airy studoval (1834) vlnovou funkci charakterizující Fraunhoferovu difrakci na kruhovém otvoru ještě před tím, než se běžně používalo Besselových funkcí. Neoznačoval ji symbolem $\frac{2J_1(x)}{x}$ používaným pro tuto z nejdůležitějších funkcí vlnové optiky, vyjadřoval ji integrálem

$$\frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cos(xt) dt$$

(srov. (4)) a vyčíslil ji integrací mocninného rozvoje integrandu; viz [11], [12], str. 321–323.

Reference

- [1] Watson G. N.: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2nd ed. At the University Press, Cambridge 1966.
- [2] Bateman H., Erdélyi, A.: *Higher Transcendental Functions*. Vol. II. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, Toronto, London 1953.
- [3] Gradshteyn I. N., Ryzhik, I. M.: *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York and London 1965, §§ 6.5 - 6.7, 8.4, 8.5.

- [4] Abramowitz M., Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publication, Inc., New York 1972, kap. 9 - 11.
- [5] Kamke E.: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 5. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1959.
- [6] Jahnke E., Emde, F.: *Tables of Functions with Formulae and Curves*. 4th ed. Dover Publications, New York 1945.
- [7] Sneddon I. N.: *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*. Oliver and Boyd, Edinburgh 1966.
- [8] Arfken G. B., Weber, H. J.: *Mathematical Methods for Physicists*. 4th ed. Academic Press, San Diego, New York, Boston 1995.
- [9] Tichonov A. N., Samarskij, A. A.: *Rovnice matematické fyziky*. NČSAV Praha 1955.
- [10] Strutt J. W. (Lord Rayleigh): *The Theory of Sound*. Vol. 1. 2nd ed. MacMillan and Co. London 1926, 318-336.
- [11] Airy G. B.: On the Diffraction of an Object-glass with Circular Aperture. Trans. Camb. Phil. Soc. **5** (1835), 283-291.
- [12] Airy G. B.: Mathematical Tracts on Lunar and Planetary Theories, the Figure of the Earth, Precession and Nutation, the Calculus of Variations, and the Undulatory Theory of Optics. Macmillan and Co., Cambridge 1858.