Moment setrvačnosti tělesa

Zadání

1. Určete moment setrvačnosti kruhové nebo obdélníkové desky (vzhledem k ose, procházející jejím těžištěm) z jejích rozměrů a hmotnosti a určete jeho nejistotu.
2. Určete moment setrvačnosti (včetně nejistoty) stejné desky pomocí doby kmitu a porovnejte shodnost popřípadě rozdílnost výsledků.
3. Určete moment setrvačnosti (včetně nejistoty) stejné desky pomocí přídavného tělíska a porovnejte shodnost popřípadě rozdílnost výsledků.

Teoretický rozbor:

Moment setrvačnosti je používán při popisu rotačních pohybů těles. Pro hmotný bod (mající hmotnost m), který se pohybuje po kruhové dráze o poloměru r je definován **moment setrvačnosti** J (často také značen I) vztahem

$$J = mr^2.$$

Stejný výraz lze použít pro výpočet momentu setrvačnosti obruče o poloměru R a hmotnosti M, která rotuje okolo osy procházející středem obruče kolmo k její rovině.

Rotující těleso si představujeme složené z dostatečně malých částí (např. molekul), které můžeme považovat za hmotné body, rotující po kruhových drahách okolo osy rotace. Tak, jako celková hmotnost tělesa M je součtem všech jednotlivých malých částí m_i, tak také moment setrvačnosti J okolo osy rotace je součtem momentů setrvačnosti jednotlivých částí J_i, tedy

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \int\limits_M r^2 dm = \iiint\limits_V r^2 \varrho dV. \tag{1}$$

Pro desku rotující okolo osy kolmé k rovině desky se zjednoduší sčítání jenom přes dva rozměry a pro symetrická tělesa rotující okolo osy procházející těžištěm jsou integrály analyticky řešitelné. Jednoduchým případem je výše vzpomenutá obruč, kterou si zjednodušeně představíme jako kružnici rozdělenou na mnoho malých stejných úseků téměř úsečkovitých částí oblouku. Úseky jsou zanedbatelně malé proti poloměru oblouku R a jsou prakticky celé stejně vzdálené od osy rotace. Proto výsledný moment setrvačnosti obruče je

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i R^2 = MR^2.$$

Kruh můžeme rozdělit na dostatečný počet tenkých obručí a jednoduchým integrálem vyřešíme moment setrvačnosti kruhové desky o poloměru R a hmotnosti M ve tvaru

$$J = \frac{1}{2} MR^2 \tag{2}$$

Pro obdélníkovou desku s rozměry obdélníku a, b má řešení vzhledem k ose rotace procházející těžištěm kolmo k desce tvar

$$J = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2). \tag{3}$$

Pro rovnoběžnou osu rotace ve vzdálenosti l od těžiště platí pro moment setrvačnosti J_l tzv. Steinerova věta

$$J_l = J + Ml^2. \tag{4}$$

Měření J pomocí doby kmitu

Pro složitější a nepravidelná tělesa, (např. setrvačník na klikové hřídeli dvoutaktního motoru) nedokážeme moment setrvačnosti vypočítat. V takovém případě necháme setrvačník kývat okolo osy rotace, jejíž vzdálenost od těžiště setrvačníku označíme l a změříme dobu kmitu T. Pro každé fyzické kyvadlo z pohybové rovnice, která je diferenciální rovnicí, vyplývá pro dobu kmitu vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J + Ml^2}{Mgl}}.$$

Z něho pro moment setrvačnosti J vhledem k ose procházející těžištěm odvodíme

$$J = \frac{T^2}{4\pi^2}Mgl - Ml^2. \tag{5}$$

V tomto vztahu se vyskytuje konstanta tíhového zrychlení g, které má v naší zeměpisné šířce velikost $9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Předposlední vztah vyjadřuje dobu kmitu T jako funkci vzdálenosti osy otáčení l od těžiště tělesa. Tato funkce má minimální hodnotu pro vzdálenost $l = R_s$, která splňuje vztah

$$J = MR_s^2 \Rightarrow R_s = \sqrt{\frac{J}{M}} \tag{6}$$

a kterou nazýváme **poloměr setrvačnosti**. Můžeme si představit, že veškerá hmotnost M našeho tělesa se při rotaci rozprostře ve vzdálenosti R_s jako ideální obruč, nebo se naopak shlukne do hmotného bodu na nehmotném závěsu (jako u matematického kyvadla).

Pro stanovení momentu setrvačnosti potřebujeme změřit tři údaje. Dobu kmitu T, hmotnost setrvačníku M a vzdálenost osy rotace od těžiště l a to i v případě, že bychom se nezajímali o moment setrvačnosti kývajícího tělesa k ose procházející jeho těžištěm.

Měření J pomocí přídavného tělíska

Když nejsme schopni zjistit přesnou polohu těžiště a proto ani jeho vzdálenost od osy otáčení, přidáme ke kývajícímu tělesu (setrvačníku) ještě jedno těleso, jehož moment setrvačnosti J_p k jeho těžišti známe a pro které jsme schopni změřit vzdálenost jeho těžiště l_p od osy rotace. Hmotnost tohoto pomocného tělesa označme také indexem p od slova "pomocný", tedy m_p. Umístíme-li pomocné těleso nad osu rotace, prodlouží se doba kmitu na

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{J_l + J_p + m_p l_p^2}{g(Ml - m_p l_p)}}. \tag{7}$$

Ze vztahu (7) vypočteme moment setrvačnosti

$$J_l = \frac{T_p^2}{4\pi^2}(Mgl - m_p g l_p) - J_p - m_p l_p^2$$

a podle vztahu (5) dosadíme

$$Mgl = J_l\frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Výsledný vztah upravíme na tvar

$$J_l = \frac{T^2}{T_p^2 - T^2}\left(\frac{T_p^2}{4\pi^2}g m_p l_p + J_p + m_p l_p^2\right). \tag{8}$$

V případě staticky vyváženého setrvačníku prochází osa otáčení těžištěm. Takový setrvačník může kmitat až po přiložení přídavného tělíska, které bude v tomto případě zavěšeno pod osou otáčení a dobu kmitu vyjádříme z pohybové rovnice vztahem

$$T_t = 2\pi\sqrt{\frac{J + J_p + m_p l_p^2}{g m_p l_p}}, \tag{9}$$

ze kterého přímo odvodíme vztah pro moment setrvačnosti tělesa (setrvačníku) vzhledem k ose otáčení procházející jeho těžištěm.

$$J = \frac{T_t^2}{4\pi^2} g m_p l_p - J_p - m_p l_p^2. \tag{10}$$

Nejistoty měření J

Nejistotu momentu setrvačnosti kruhové desky vypočteného podle (2) určíme

$$\Delta J = R\sqrt{\frac{[R\Delta M]^2}{4} + [M\Delta R]^2},$$

a v případě obdélníkové desky (3)

$$\Delta J = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{[(a^2+b^2)\Delta M]^2}{4} + [Ma\Delta a]^2 + [Mb\Delta b]^2}.$$

Nejistotu momentu setrvačnosti z doby kmitu zavěšeného fyzikálního tělesa bez přídavného tělíska (5) vypočteme vztahem

$$\Delta J = \sqrt{\left[\frac{T}{2\pi^2} Mgl\Delta T\right]^2 + \left[(\frac{T^2}{4\pi^2} gl - l^2)\Delta M\right]^2 + \left[(\frac{T^2}{4\pi^2} Mg - 2Ml)\Delta l\right]^2}.$$

Vztah pro výslednou nejistotu v předposlední metodě podle vztahu (8) je dosti složitý a proto si rozbor zjednodušíme pouze na vliv nejistot měření obou dob kmitů. Vliv nejistot měření parametrů přídavného tělíska je v našem měření skutečně dostatečně malý. Potom vztah pro výslednou nejistotu má relativně jednoduchou formu

$$\Delta J_l = \frac{2T}{T_p^2 - T^2}\sqrt{\left[\frac{T_p T}{T_p^2 - T^2}(\frac{2T_p^2 - T^2}{4\pi^2} g m_p l_p + J_p + m_p l_p^2)\Delta T_p\right]^2 + \left[\frac{T_p^2 + T^2}{T_p^2 - T^2}(\frac{T_p^2}{4\pi^2} g m_p l_p + J_p + m_p l_p^2)\Delta T\right]^2}$$

V případě, že osa otáčení prochází těžištěm setrvačníku (10) je nejistota momentu setrvačnosti na nejistotě měření doby kmitu méně citlivá a je určena vztahem

$$\Delta J = \sqrt{\left[\frac{T_t}{2\pi^2} g m_p l_p \Delta T_t\right]^2 + \left[(\frac{T_t^2}{4\pi^2} g m_p - 2 m_p l_p)\Delta l_p\right]^2 + \left[(\frac{T_t^2}{4\pi^2} g l_p - l_p^2)\Delta m_p\right]^2 + [\Delta J_p]^2}.$$

Poznámka:

Pro desky osově symetrického tvaru lze vypočítat moment setrvačnosti z jejích rozměrů podle vztahů (2) a (3). Měření z doby kmitu podle vztahu (5) je použitelné pro každý případ, kdy jsme schopni změřit vzdálenost těžiště od osy kývání. Tedy i v případě, že pro tvarovou složitost tělesa není analyticky řešitelný definiční integrál pro moment setrvačnosti. Nejuniverzálnější je metoda s přídavným tělískem, která nám umožní vyloučit vzdálenost osy otáčení od těžiště, což u složitých setrvačníků, kdy poloha těžiště je nepřístupná nebo nezjistitelná, je zapotřebí. Metoda s přídavným tělískem je ale také nejnáročnější na vyhodnocení a hlavně na přesnost měření doby kmitu. Jednodušší je pak případ, kdy osa otáčení prochází těžištěm a výpočet provedeme podle vztahu (10).