Mechanické vlnění: stojaté vlnění na struně

Zadání

1. Zjistěte lineární hustotu ρ_L vlákna při čtyřech různých velikostech napínající síly F. Závislost $\rho_L(F)$ vyneste do grafu.
2. Pro jeden zvolený mód rezonance zjistěte závislost rezonanční frekvence vlákna na napínající síle a vytvořte graf této závislosti. Do grafu vyneste i teoretické hodnoty rezonančních frekvencí.
3. Při konstantní napínající síle určete rychlost vlnění na vlákně (včetně nejistoty) z rezonanční frekvence vlákna a jeho délky. Porovnejte výsledky získané pro tři různé rezonanční módy.
4. Pro vybraný mód určete z rezonanční frekvence rychlost vlnění na vlákně pro čtyři různé napínající síly. Výsledky porovnejte s teoretickými hodnotami.

Teoretický rozbor:

Postupné mechanické vlnění

Mechanické vlnění vzniká šířením kmitavého rozruchu látkovým prostředím. Zdrojem takového vlnění je oscilátor, kmitající s určitou frekvencí f (a periodou $T = 1/f$) a amplitudou A. Mezi elementy prostředí musí existovat pružná vazba, která umožní šíření vibrací od zdroje prostorem určitou rychlostí, kterou nazýváme rychlostí vlnění a označujeme c (takto se často značí i rychlost zvuku či světla, což nepřekvapí, neboť se jedná též o vlnění). Vzniklé postupné vlnění má pak vlnovou délku λ, která odpovídá vzdálenosti, kterou vlnění urazí za jednu periodu T

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}. \tag{1}$$

Jak je patrné, vlnová délka závisí na periodě (potažmo frekvenci) a rychlosti vlnění. Zatímco perioda vlnění je určená zdrojem, rychlost vlnění je určena vlastnostmi prostředí.

Rychlost šíření postupné vlny na vlákně závisí na síle F, kterou je vlákno napnuté a na lineární hustotě ρ_L struny, kterou definujeme

$$\rho_L = \frac{m}{L},$$

kde m je hmotnost vlákna a L jeho délka. U měkkých vláken se s napínající silou mění jejich délka a tím i jejich lineární hustota. Známe-li délku nenapnutého vlákna L_0 a jeho lineární hustotu ρ_{L0}, lze hustotu napnuté struny spočítat na základě změřené délky L napnutého vlákna ze vztahu

$$\rho_L = \rho_{L0} \frac{L_0}{L}. \tag{2}$$

Vztah pro rychlost šíření vlnění lze odvodit z diferenciální pohybové rovnice pro malé úseky $\mathrm{d}x$ struny, kterou zde však uvádět nebudeme. Napíšeme si jen odvozený vztah

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho_\mathrm{L}}}. \tag{3}$$

Při natažení struny nebo vlákna dojde jak ke zvýšení napínající síly, tak ke snížení hustoty ρ_L, a proto i ke zvětšení rychlosti vlnění c.

Budeme-li se zabývat vlnou šířící se na struně jedním směrem (např. podél osy x), lze časovou závislost výchylky elementu struny, jehož poloha je x, zapsat ve tvaru

$$y(x,t) = A \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right).$$

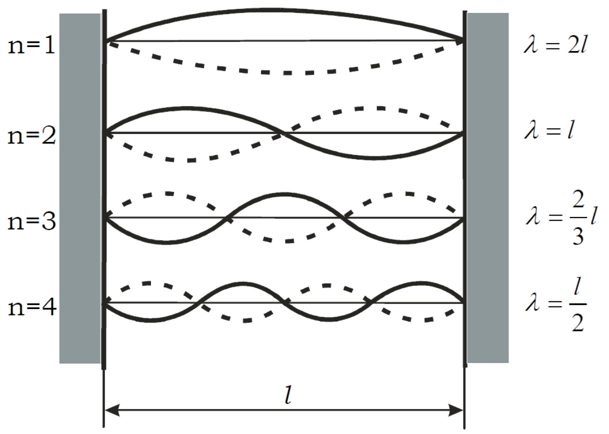
Uvedený vztah odpovídá vlně šířící se v kladném směru osy x. Změnou znaménka některého z obou členů argumentu funkce sinus získáme vztah pro vlnu, která se šíří v opačném směru.

Stojaté vlnění

Stojaté vlnění na struně vzniká interferencí dvou postupných vlnění šířících se proti sobě. Interferencí nazýváme superpozici (skládání) harmonických (sinusových) vln se stejnými frekvencemi. Šíření postupné vlny lze vyvolat jedním impulsem, anebo kontinuálním harmonickým buzením. V případě jediného impulsu (např. brnknutí) se od místa rozruchu šíří postupné vlny na obě strany a odráží se od pevných konců zpět. Při jejich setkání dochází k interferenci, a tedy vzniku stojatého vlnění. Při kontinuálním buzení na jednom konci struny se postupné vlnění odrazí od druhého (pevného) konce struny a vrací se (fázově posunuté o $\pi/2$) zpět. Při zpáteční cestě se skládá s vlněním, které se ještě neodrazilo (dá se říci „samo se sebou“), přičemž opět vzniká vlnění stojaté. Pro stojaté vlnění je typické, že některé elementy struny mají trvale nulovou výchylku, jak je vidět na obr. 1. Místům, ve kterých tyto elementy leží, říkáme uzly. Naopak těm místům, ve kterých kmitají elementy struny s největší amplitudou, říkáme kmitny. Vzdálenost sousedních uzlů nebo sousedních kmiten je $\lambda/2$. Z obr. 1 je také patrné, že stojaté vlnění na struně nemůže mít libovolnou vlnovou délku, protože na struně délky l se musí vytvořit celistvý počet půlvln. Toto lze matematicky vyjádřit vztahem

$$l = \frac{\lambda}{2} n, \tag{4}$$

kde n je celé kladné číslo.



Obrázek 1: Stojaté vlnění na struně

Nejnižší hodnota $n = 1$ odpovídá tzv. základní (též fundamentální) vlastní frekvenci struny. Ostatní vlastní frekvence (pro $n = 2, 3 \ldots$) se nazývají vyšší harmonické. Každý strunný hudební nástroj má různý podíl zastoupení těchto harmonických frekvencí ve spektru vydávaného tónu, což určuje jeho charakteristickou barvu.

Při buzení impulsem jsou zastoupeny všechny vlastní frekvence, nejvíce však základní, neboť je tlumena nejméně. Jelikož však struna není dále buzena, vlnění je tlumeno a postupně zaniká - energie vlnění se přemění v práci třecích sil ve struně a práci sil odporu prostředí. Pokud strunu budíme harmonicky, energie je struně dodávána kontinuálně a nedochází tak k zániku vlnění. Struna kmitá na jediné frekvenci, která je rovna frekvenci budící. Pokud je navíc budící frekvence rovna některé z vlastních frekvencí struny, nastává **rezonance**, při které dochází k zesílení amplitudy kmitů. Proto jsou často vlastní frekvence nazývány frekvencemi rezonančními.

Ze vztahů (1,3,4) lze odvodit vztah pro vlastní frekvence napnuté struny délky l (viz obr. 1) upevněné na obou koncích ve tvaru

$$f = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho_L}}. \tag{5}$$

Rychlost vlnění pak lze při nastavené rezonanci spočítat z rezonanční frekvence f_r pomocí vztahů (1) a (4) jako

$$c = \frac{2l}{n} f_\mathrm{r}.$$

Nejistotu rychlosti vlnění pak můžeme určit z nejistot délky vlákna a frekvence

$$\Delta c = \sqrt{\left(\frac{2l}{n}\Delta f_\mathrm{r}\right)^2 + \left(\frac{2f_\mathrm{r}}{n}\Delta l\right)^2}.$$