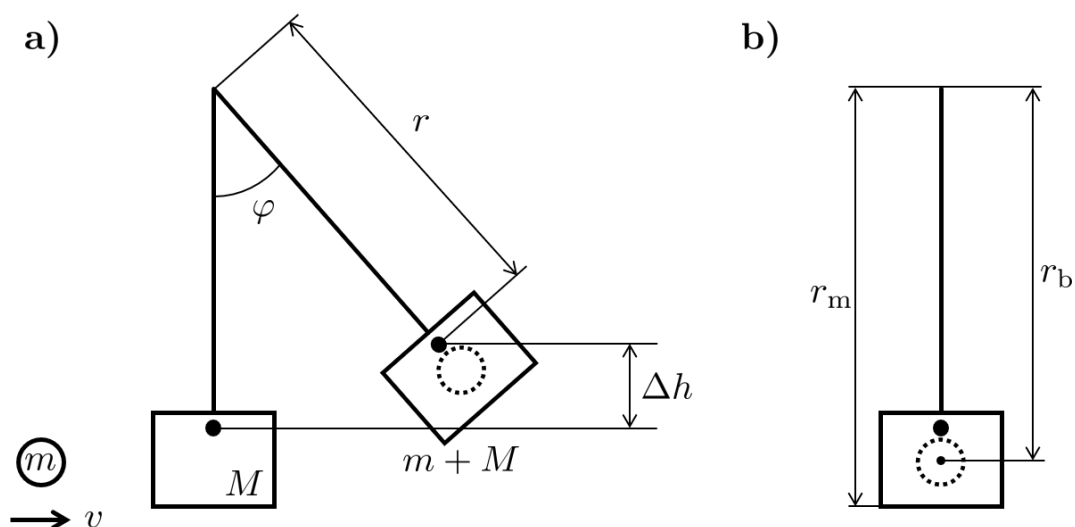

Balistické kyvadlo

Zadání

1. Změřte maximální výchylku balistického kyvadla po zachycení ocelové kuličky pro tři možné předpětí katapultu.
2. Pomocí naměřené maximální výchylky a parametrů kyvadla vypočítejte počáteční rychlost kuličky v dle vztahu (5) a vynesete závislost $v(\varphi)$ do grafu.
3. Srovnejte počáteční rychlost kuličky získanou aproximací ze vztahu (5), exaktním řešením a měřením optickou pastí. Určete faktor korekce f_k mezi aproximační a exaktní počáteční rychlostí.

Teoretický rozbor

Dříve než byla možnost měřit čas elektronicky, používalo se k určení rychlosti střel tzv. balistické kyvadlo. Tato klasická metoda spočívá ve vystřelení projektilu do zavěšeného tělesa (kyvadla) setrvávajícího v klidu ve své rovnovážné poloze. Uvažujeme hmotnost kyvadla mnohem větší než je hmotnost samotného projektilu. Projektil uvízne v kyvadle a nadále se pohybují dohromady jako soustava mimo původní rovnovážnou polohu. Tento proces představuje nepružnou srážku, při které se zachovává hybnost, ale mění se energie soustavy. Celý proces ovšem můžeme rozdělit do dvou kroků: 1) dokonale nepružná srážka projektilu s kyvadlem, při které se mechanická energie nezachovává a 2) následné vystoupání kyvadla s projektilem do dané výšky, při němž se už mechanická energie zachovává. Jestliže tedy známe parametry kyvadla a maximální výchylku kyvadla s uvízlým projektilem, jsme schopni odvodit počáteční rychlost projektilu. Schema balistického kyvadla je na Obr. 1a.



Obr. 1: a) Schematické zobrazení balistického kyvadla před srážkou a v místě největší výchylky Δh a b) definice specifických rozměrů kyvadla r_b a r_m potřebných pro exaktní řešení úlohy.

Uvažujme kyvadlo tvořené tělesem o hmotnosti M s uvízlým projektilem o hmotnosti m , které se pohybuje jako hmotný bod v místě společného těžiště. Uvažujeme-li v klidové poloze kyvadla nulovou hladinu potenciální energie E_p , pak v nejvyšším bodě oscilace kyvadla platí

$$E_p = (m + M)g\Delta h, \quad (1)$$

kde g je gravitační zrychlení a Δh je výška, na kterou se těžiště dostalo vůči počáteční poloze. Se vzrůstající vzdáleností r osy otáčení a těžiště (Obr. 1) můžeme přepsat vztah (1) pomocí úhlu vychýlení kyvadla φ jako

$$E_p = (m + M)gr(1 - \cos \varphi). \quad (2)$$

Ze zákona zachování energie vyplývá rovnost potenciální energie kyvadla v nejvyšším bodě kmitu a kinetické energie E_k kyvadla těsně po srážce. Platí

$$E_k = \frac{1}{2}(m + M)v_p^2, \quad (3)$$

kde v_p je rychlost kyvadla těsně po srážce s projektilem. V naší soustavě kyvadla s projektilem víme, že kyvadlo je před srážkou v klidu, tedy celková hybnost před srážkou náleží projektilu. Pro hybnost kyvadla po srážce platí $p = (m + M)v_p$ a dosazením do rovnice (3) dostáváme:

$$E_k = \frac{p^2}{2(m + M)} \quad \text{nebo} \quad p = \sqrt{2(m + M)E_k}. \quad (4)$$

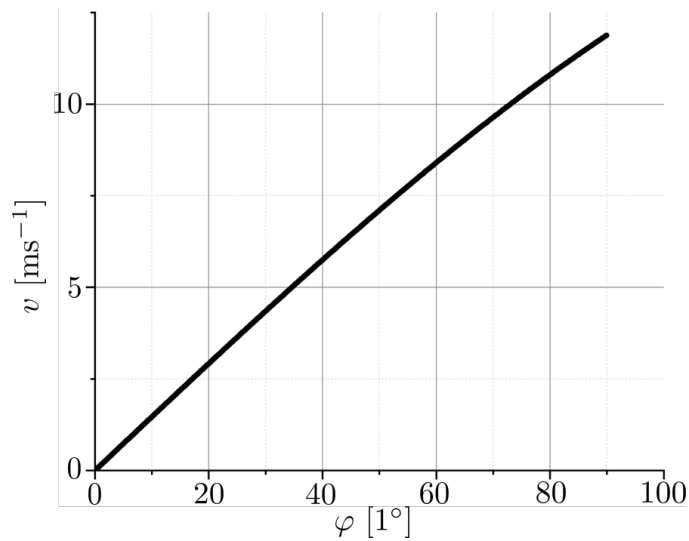
Ze zákona zachování hybnosti vyplývá rovnost celkové hybnosti soustavy před srážkou a po ní. Porovnáme tedy hybnost projektilu před srážkou a hybnost vyjádřenou v rovnici (4). Díky platnosti zákona zachování energie po srážce můžeme za kinetickou energii v rovnici (4) dosadit potenciální energii z rovnice (2). Pro počáteční rychlost projektilu tedy platí:

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gr(1 - \cos \varphi)}. \quad (5)$$

Ze zákona šíření chyb určíme nejistotu rychlosti

$$\Delta v = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{2(m + 1)\Delta M}{m + M}\right)^2 + \left(\frac{2M\Delta m}{m(m + M)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\Delta \varphi \cot \frac{\varphi}{2}\right)^2}. \quad (6)$$

Na Obr.3 je znázorněna závislost počáteční rychlosti v na úhlu vychýlení kyvadla φ . Pro úhly 0° až 90° se dá závislost považovat za přímku a můžeme říci, že výchylka kyvadla je přímo úměrná rychlosti projektilu.



Obr. 2: Teoreticky vypočítaná křivka počáteční rychlosti projektilu u experimentu s balistickým kyvadlem. Jedná se pouze o ukázkovou křivku pro smyšlené hodnoty parametrů experimentální soustavy.

Exaktní řešení

Řešení v minulé části jsme odvodili pro poněkud zjednodušený systém, ve kterém jsme některé jevy idealizovali. Rovnice (5) je velmi užitečná z praktického hlediska, ovšem je platná pouze jako aproximace. Odvodíme tedy vztah pro přesné, exaktní, určení počáteční rychlosti balistického kyvadla. Pro začátek zaměníme vztah pro kinetickou energii v rovnici (2) za rovnici rotační energie fyzického kyvadla:

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (7)$$

kde I je moment setrvačnosti kyvadla se zachyceným projektilem a ω je jeho uhlová rychlost. Dosadíme moment hybnosti $L = I\omega$ a dostáváme

$$E_k = \frac{L^2}{2I} \quad \text{nebo} \quad L = \sqrt{2IE_k}. \quad (8)$$

Tento moment hybnosti kyvadla musí být roven momentu hybnosti L_b kuličky těsně před srážkou. Pokud r_b je vzdálenost kuličky od osy otáčení kyvadla v přesném místě zachycení projektilu kyvadlem (viz Obr.1b), platí

$$L_b = mr_b^2\omega = mr_b v. \quad (9)$$

Momenty hybnosti L a L_b se rovnají, tedy

$$v = \frac{1}{mr_b} \sqrt{2I(m+M)gr(1-\cos\varphi)}. \quad (10)$$

Moment setrvačnosti I fyzického kyvadla určíme pomocí periody kmitu T . Z řešení pohybové diferenciální rovnice fyzického kyvadla dostaneme vztah pro periodu kmitu, ze kterého úpravou získáme vyjádření momentu setrvačnosti, platného pro naše kyvadlo:

$$I = \frac{(m+M)grT^2}{4\pi^2}. \quad (11)$$

Dosazení do rovnice (10) dostáváme pro počáteční rychlost projektilu

$$v = \frac{m+M}{m} \left(\frac{r}{r_b} \right) \left(\frac{gT}{2\pi} \right) \sqrt{2(1-\cos\varphi)}. \quad (12)$$

Odchylku rychlosti opět získáme ze zákona šíření chyb

$$\Delta v = v \sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 + \left(\frac{r_b}{r} \right)^2 + \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \cot \frac{\varphi}{2} \right)^2 + \left(\frac{(m+1)\Delta M}{m+M} \right)^2 + \left(\frac{m\Delta m}{m(m+M)} \right)^2}. \quad (13)$$

Srovnáme velikost rychlosti v_{ap} získanou z rovnice (5) s přesnou velikostí rychlosti v_{ex} vypočítanou z rovnice (10). Tyto rychlosti spolu souvisejí vztahem $v_{ex} = f_k v_{ap}$, kde f_k je korekční faktor pro který, po dosazení za rychlosti z daných rovnic, platí

$$f_k = \frac{T}{2\pi r_b} \sqrt{rg}. \quad (14)$$

Tento vztah se stane více ilustrativní, pokud dosadíme za periodu T vztah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_m}{g}}, \quad (15)$$

kde r_m je délka matematického kyvadla o periodě T . (Pozn.: Odvozením tohoto vztahu jsme se zabývali v úloze s reverzním kyvadlem.) Kombinací rovnic (14) a (15) dostáváme pro korekční faktor

$$f_k = \frac{\sqrt{rr_m}}{r_b}. \quad (16)$$

Pro myšlenkový experiment, kde uvažujeme projektil jako hmotný bod, který se srazí nepružně s matematickým kyvadlem setrvávajícím v klidu, kde si jsou tři délky ve vztahu (16) rovny platí $f_k = 1$. Změřením r a r_b využitých u fyzického kyvadla a výpočtem r_m ze změřené periody kmitu T můžeme určit korekční faktor f_k ze vztahu (16) platný pro velikosti rychlostí získaných z rovnic (5) a (12).