

Měření tíhového zrychlení reverzním kyvadlem

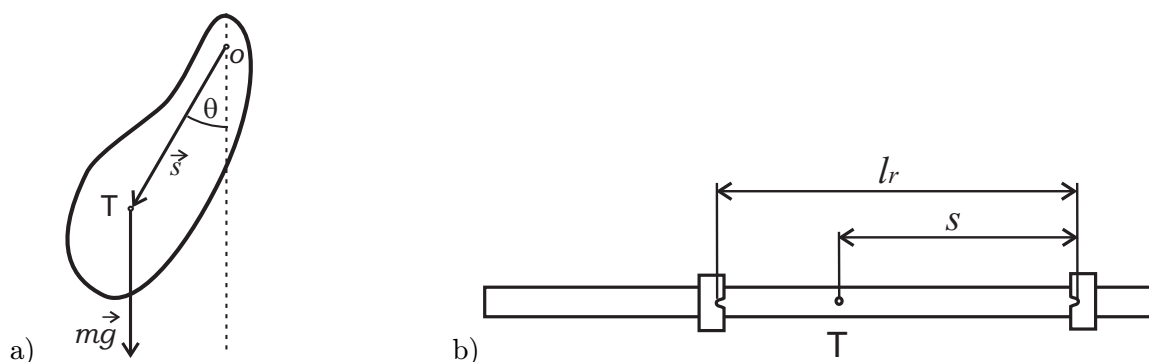
Zadání

1. Určete závislost doby kmitu reverzního kyvadla pro různé vzdálenosti osy rotace od těžiště.
2. Vypočtete tíhové zrychlení g a určete jeho nejistotu.

Teoretický rozbor:

Fyzické (též fyzikální) kyvadlo

Těleso, které lze otáčet kolem osy o , která neprochází těžištěm (hmotným středem) T , se nazývá **fyzické kyvadlo**. Od matematického kyvadla se liší tím, že hmota kyvadla není soustředěna v jednom bodě, ale je rozložena v prostoru (obr. 1a).



Obrázek 1: a) Schematický náčrt fyzického kyvadla, b) příklad reverzního kyvadla.

Při vychýlení kyvadla z rovnovážné polohy a jeho uvolnění působí na kyvadlo moment síly $\vec{M}$, který je vektorovým součinem ramena $\vec{s}$ a působící síly $m\vec{g}$. Dle obr. 1a je možné jeho velikost vyjádřit

$$M = mgs \sin \theta,$$

kde mg je tíhová síla, s je velikost ramena síly (vzdálenost těžiště T od osy otáčení o) a θ je úhel, který svírají odpovídající vektory. Pohybovou rovnici pro otáčivý pohyb pak lze zapsat ve tvaru

$$I\varepsilon = mgs \sin \theta,$$

kde úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ a I je moment setrvačnosti kyvadla vůči ose otáčení o . Moment setrvačnosti se většinou vyjadřuje vůči ose procházející těžištěm I_T . Pro přepočet momentu setrvačnosti pro osu rovnoběžnou s osou procházející těžištěm ve vzdálenosti s platí Steinerova věta

$$I = I_T + ms^2. \quad (1)$$

Použitím aproximace $\sin \theta \approx \theta$ (pouze pro malé výchylky, t.j. malé hodnoty θ) a dosazením do pohybové rovnice a následnou úpravou dostaneme diferenciální rovnici prvního řádu

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgs\theta}{I} = 0.$$

Obecné řešení této diferenciální rovnice má tvar

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\Omega t + \varphi),$$

kde θ_0 je amplituda oscilací, φ je počáteční fáze a Ω je úhlová rychlost (úhlová frekvence) kmitání, kterou lze vyjádřit

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgs}{I_T + ms^2}}.$$

Pro periodu kmitů kolem osy o pak vyplývá

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_T + ms^2}{mgs}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(\frac{I_T}{ms} + s\right)}. \quad (2)$$

Reverzní kyvadlo

Reverzní (převratné) kyvadlo je fyzické kyvadlo, které lze zavěsit tak, aby se otáčelo kolem dvou různých rovnoběžných os se stejnou periodou. Tyto osy kolmo protínají přímkou, na které leží těžiště (nesymetricky mezi průsečíky os s touto přímkou). Příklad takového kyvadla je na obr. 1b. Jedná se o tyč vybavenou dvěma posuvnými objímkami, které lze zavěsit na břity (určující osu otáčení). Jak je z obrázku patrné, jedná se o poměrně jednoduché těleso. Moment setrvačnosti a polohu těžiště symetrického a homogenního tělesa lze poměrně snadno spočítat, takže je v principu možné vztah (2) snadno upravit pro výpočet tíhového zrychlení. Vztah (2) však obsahuje mnoho veličin, jejichž nejistoty by neumožnily určení g s dostatečnou přesností. Využijeme proto možnosti kyvadlo převrátit (a nechat kývat kolem osy o').

Vztah (2) zjednodušíme nejprve zavedením tzv. **redukované délky** kyvadla

$$l_r = \frac{I_T}{ms} + s,$$

čímž pro periodu T fyzického kyvadla (otáčejícího se kolem osy o) dostáváme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}. \quad (3)$$

Tento výraz je v případě, že $l_r = l$ totožný s výrazem pro periodu matematického kyvadla, u kterého je hmota soustředěna v jednom bodě (např. hmotná kulička na dlouhém vlákně). U fyzického kyvadla však redukovaná délka l_r závisí na hmotnosti a rozložení hmoty vůči ose otáčení.

Pokud kyvadlo převrátíme a necháme ho kývat kolem osy o' , bude vzdálenost osy otáčení od těžiště rovna $l_r - s$. Dosazením do vztahu (2) dostaneme pro periodu kmitů kolem osy o'

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(\frac{I_T}{m(l_r - s)} + l_r - s\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(\frac{I_T}{m} \frac{ms}{I_T} + \frac{I_T}{ms}\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(s + \frac{I_T}{ms}\right)} = T.$$

Z výsledku vyplývá, že fyzické kyvadlo má pro každou osu otáčení o odpovídající osu otáčení o' , pro kterou je perioda kmitání stejná ($T = T'$). Najdeme-li tedy v tělese dvě rovnoběžné osy (nestejně vzdálené od těžiště), vůči kterým kyvadlo kmitá se stejnou periodou, je vzdálenost os rovna redukované délce fyzického kyvadla.

Ze znalosti redukované délky kyvadla l_r a odpovídající periody kmitů T pak lze vypočítat tíhové zrychlení konverzí vztahu (3)

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l_r \quad (4)$$

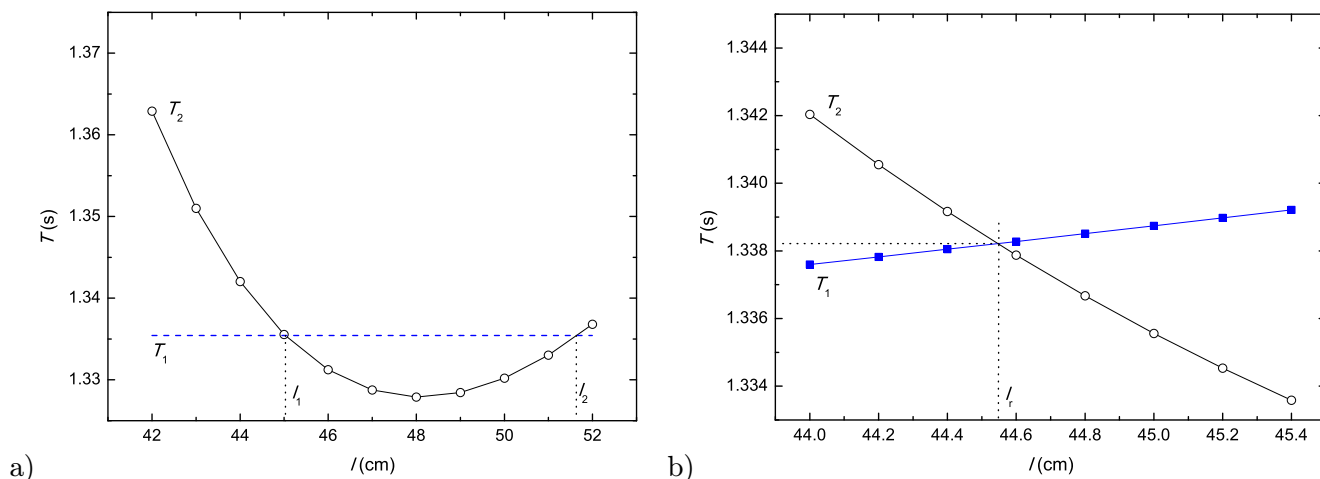
a jeho nejistotu určit z nejistot ΔT periody kmitání a Δl_r redukované délky

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \Delta l_r\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 l_r}{T^3} \Delta T\right)^2}.$$

Provedení experimentu

Pro měření tíhového zrychlení použijeme kyvadlo, jaké je na obr. 1b. Kyvadlo je vybavené dvěma posuvnými objímkami (označme je O1 a O2) pro uložení břítů. Jelikož vzdálenost os, kolem kterých kyvadlo kývá se stejnou periodou, předem neznáme, musíme se ji pokusit zjistit měřením.

Nechť je poloha objímky O1 neměnná, zatímco objímku O2 posouváme při měření po kyvadle, čímž měníme vzdálenost l obou objímek. Po zavěšení tyče na objímce O1 změříme periodu kmitů T_1 . Poté kyvadlo převrátíme, zavěsíme na objímce O2 a změříme periodu kmitů T_2 . Poté postupně měníme polohu objímky O2 a měříme pro každou vzdálenost objímek l dobu kyvu T_2 . Naměřenou závislost $T_2(l)$ zakreslíme do grafu. Příklad takového grafu je na obr. 2a. Do grafu vyznačíme dobu kmitu T_1 vodorovnou



Obrázek 2: a) Závislost doby kmitu T_2 na vzdálenosti l obou os otáčení kyvadla, b) určení redukované délky l_r a odpovídající periody T .

přímkou, čímž získáme dva průsečíky a jim odpovídající vzdálenosti l_1 a l_2 , ve kterých je perioda kmitů $T_2 = T_1$ stejná. Protože objímky mají nezanedbatelnou hmotnost, mění se při posouvání jedné z nich poloha těžiště i moment setrvačnosti k ose procházející druhou objímkou. Z toho vyplývá, že se při změně vzdálenosti l objímek mění nejen perioda T_2 , ale i T_1 (ta ovšem méně). Průsečíky v grafu 2a tedy ještě neurčují hledanou redukovanou délku l_r , ale pomohou nám v jejím určení, protože l_r je blízká vzdálenosti l_1 .

Pro přesnější určení tíhového zrychlení tedy proměříme podrobněji interval hodnot kolem l_1 . Pro každou hodnotu l však budeme měřit jak periodu T_2 (při zavěšení kyvadla na objímku O2), tak i T_1 po převrácení kyvadla a jeho zavěšení na objímku O1. Obě závislosti $T_1(l)$ a $T_2(l)$ pak vyneseme do jednoho grafu. To je znázorněno na obr. 2b. Průsečík obou zobrazených křivek pak určuje redukovanou délku kyvadla l_r a odpovídající periodu kmitu T . Takto odečtené hodnoty lze dosadit do vztahu (4) pro výpočet tíhového zrychlení g .