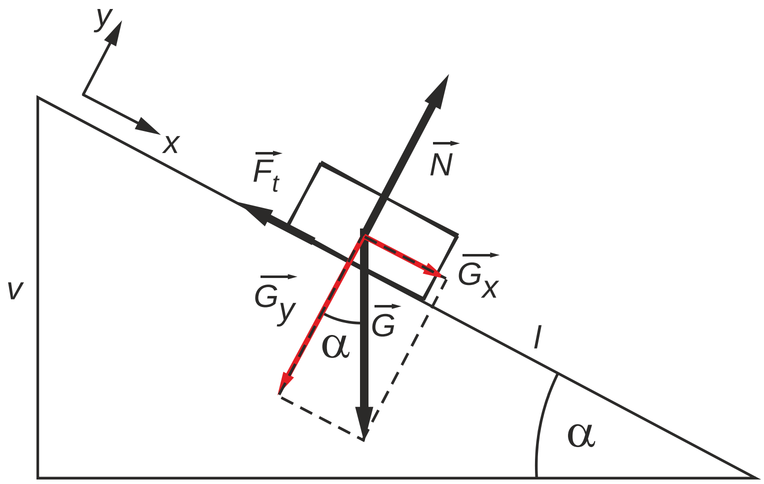
Pohyb tělesa po nakloněné rovině

Zadání

1. Pro vybrané těleso a materiál nakloněné roviny zjistěte závislost polohy tělesa na čase při jeho pohybu. Výsledky vyneste do grafu a rozhodněte z něj, o jakou křivku jde.
2. Zjistěte závislost rychlosti tělesa při pohybu po nakloněné rovině na vzdálenosti a na čase.
3. Z výsledků předchozích měření určete zrychlení tělesa.
4. Vypočítejte koeficient dynamického tření f_d pro zvolenou kombinaci materiálů.
5. Plynulým zvětšováním úhlu α nakloněné roviny se pokuste určit koeficient statického tření f_s.

Teoretický rozbor



Obr. 1: Síly působící na těleso na nakloněné rovině.

Položíme-li na nakloněnou rovinu schematicky znázorněnou na obrázku č. 1 tělísko, může dojít ke dvěma jevům. Tělísko může zůstat buď v klidu, nebo začne klouzat po nakloněné rovině směrem dolů. Na rozhraní mezi oběma tělesy dochází k tzv. tření, které závisí především na materiálu a kvalitě povrchu těles ve vzájemném kontaktu a dále na úhlu nakloněné roviny α. Tyto parametry rozhodnou o tom, zda bude těleso klouzat nebo zůstane v klidu.

Tření je jev, který nastává při vzájemném pohybu těles v těsném kontaktu. Jeho výsledkem je třecí síla, která působí vždy proti pohybu těles. Třecí sílu je možné vyjádřit jednoduchým vztahem

$$F_t = fN, \tag{1}$$

Kde f je koeficient tření a N je kolmá tlaková síla mezi tělesy $\vec{N}$, která může být vyvozena např. tíhovou sílou $\vec{G}$. Výraz nelze zapsat vektorově, protože koeficient f je skalární veličina a vektory $\vec{F_t}$ a $\vec{N}$ jsou navzájem kolmé. Pro poměrně velký rozsah rychlostí je třecí síla konstantní a nezávislá na styčné ploše těles (Amontonovy a Coulombovy zákony tření). Protože se příslušný koeficient tření vztahuje k pohybujícím se tělesům, často se označuje jako dynamický (nebo také kinematický, případně smykový). Je však důležité odlišit situaci, kdy je těleso teprve uváděno do pohybu. V tomto případě je obvykle třecí síla $\vec{F_t}$ větší než při pohybu těles a to je vyjádřeno tzv. statickým (klidovým) koeficientem tření, který je zde označen f_s. Vztah (1) pro výpočet velikosti třecí síly zde platí rovněž

$$F_{t\,max} = f_s N,$$

skutečná velikost třecí síly mezi tělesy však může nabývat libovolných hodnot od 0 do $F_{t\,max}$. Jakákoliv složka síly působící ve směru případného pohybu (např. tíhová síla) je totiž vyvážena třecí silou, která pohybu brání. Teprve při zvýšení třecí síly nad hodnotu $F_{t\,max}$ dochází k „utržení tělesa“, jeho uvedení do pohybu a skokovému snížení koeficientu tření – statický koeficient f_s je nahrazen dynamickým koeficientem f_d. Přibližné hodnoty obou koeficientů tření jsou uvedeny v tab. 1.

Látka	f_s	f_d
Ocel na oceli, suchá	0,15	0,10
Ocel na bronzi, suchá	0,18	0,16
Ocel na bronzi, dobře mazáno	0,1	0,01
Ocel na dřevě (průměrně)	0,55	0,35
Dřevo na dřevě (průměrně)	0,65	0,30
Kůže na kovu	0,60	0,25
Kožený řemen na litině	0,56	0,28
Kožený řemen na dřevě	0,47	0,27

Tab. 1: Koeficienty statického (f_s) a dynamického tření (f_d) pro vybrané dvojice materiálů. Zdroj: Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, SPN Praha, 1988.

Pro výpočet pohybu tělesa na nakloněné rovině je třeba vyjít z 2. Newtonova pohybového zákona

$$\sum \vec{F} = m\vec{a},$$

kde $\sum \vec{F}$ představuje součet všech sil na těleso působících (viz obr. 1). V našem případě je přítomna tíhová síla $\vec{G}$, třecí síla $\vec{F_t}$ a normálová síla $\vec{N}$. Někdy se vektorový součet sil $\vec{F_t}$ a $\vec{N}$ označuje jako reakční síla od podložky (reakce) a značí se $\vec{R}$,

$$\vec{R} = \vec{F_t} + \vec{N}.$$

Pro výpočet pohybu tělesa je vhodné síly rozdělit na složky ve směrech *x* a *y*, viz obr. 1. Tíhovou sílu je pak nutné rozložit do složek v uvedených osách:

$$G_x = G\sin\alpha = mg\sin\alpha \text{ a}$$

$$G_y = G\cos\alpha = mg\cos\alpha.$$

Dále vyjádříme podle druhého Newtonova zákona síly působící v jednotlivých osách

x: $$-F_t + G_x = ma_x \text{ a}$$

y: $$-G_y + N = ma_y.$$

Ve směru *y* se těleso nepohybuje ($a_y = 0$), tj. platí

$$N = mg\cos\alpha.$$

Třecí sílu působící na pohybující se tělísko lze vyjádřit vztahem

$$F_t = f_d N = f_d\, mg\cos\alpha$$

a po dosazení F_t a G_x do rovnice vyjádřené ve směru x dostáváme vztah pro zrychlení ve směru x

$$a_x = g(\sin\alpha - f_d \cos\alpha). \tag{2}$$

Zrychlení tělesa tedy bude záviset na sklonu roviny α a dynamickém koeficientu tření f_d. Ve speciálním případě, kdy složka gravitační síly ve směru pohybu tělesa je právě rovna síle třecí, tj.

$$F_t = G_x$$

platí, že ve směru x bude výslednice sil nulová ($a_x = 0$) a těleso se bude pohybovat rovnoměrnou rychlostí. Z rovnice vyplývá, že tento případ nastane, pokud bude platit

$$f_d = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha.$$

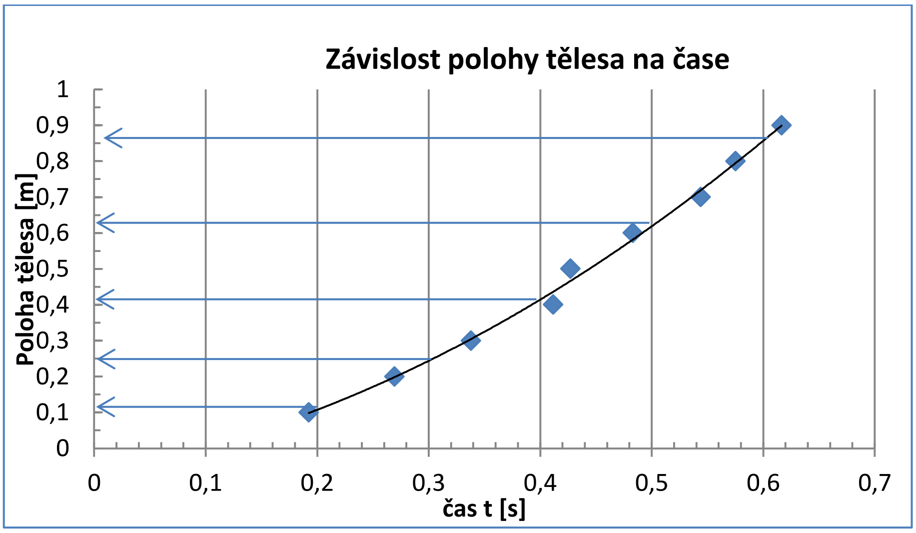
Známe-li výraz pro výpočet zrychlení tělesa (2), lze vypočítat závislost rychlosti a polohy tělesa na čase. Pro rychlost platí

$$v = v_0 + at = v_0 + \; gt(\sin\alpha - f_d \cos\alpha)$$

a pro polohu tělesa platí

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 = v_0 t + \tfrac{1}{2}\; gt^2(\sin\alpha - f_d \cos\alpha).$$

Z výše uvedených vztahů je již možné vyjádřit a vypočítat koeficient dynamického tření f_d.



Obr. 2: Přizpůsobení grafu pro výpočet zrychlení tělesa.

Provedení experimentu

Ad 1) Nejprve budeme sledovat závislost polohy tělesa na čase. Těleso necháme volně klouzat po nakloněné rovině a budeme sledovat okamžiky jeho průchodů jednotlivými branami. K měřením tohoto typu je uzpůsoben režim č. 2 vyhodnocovací jednotky. Při jeho nastavení měření začíná průchodem prvou branou. Jednotka pak udá okamžiky průchodu všemi následujícími branami. Protože známe vzdálenosti bran, můžeme s pomocí zjištěných okamžiků průchodu snadno sestavit graf závislosti dráhy x na čase t, tedy funkci

$$x = x(t).$$

Z tvaru získané křivky můžeme dojít k jejímu funkčnímu vyjádření. K tomu ale musíme graf uzpůsobit. Na ose t zvolíme modul tak, aby době průchodu tělesa mezi prvou a poslední branou odpovídala úsečka delší než asi 12 cm. Na ní utvoříme posloupnost asi 10-ti ekvidistantních intervalů, jak ukazuje obr. 2, a pro jejich koncové body odečteme z grafu velikosti jim odpovídajících proběhnutých drah x, jak je opět vidět z obr. 2. Velikosti drah zapíšeme do tabulky č. 2. Tabulku doplníme o jejich prvé a druhé diference. Budou-li druhé diference již konstantní, bude křivka popsána kvadratickou funkcí. Je to obecný způsob určení stupně křivky. Zde sledujeme rovnoměrně zrychlený pohyb tělesa, o němž víme, že dráha je kvadratickou funkcí času. Popsaný rozbor grafu je tedy pouze experimentálním ověřením známých vlastností rovnoměrně zrychleného pohybu.

Z tabulky zjistíme střední hodnotu druhých diferencí dráhy. Dá se dokázat, že zrychlení tělesa s ní souvisí vztahem

$$a = \frac{\overline{\Delta_2 x}}{(\Delta t)^2},$$

kde Δt je přírůstek času ve zvolených časových intervalech.

<table>
<tr><th>x [cm]</th><th>první diference</th><th>druhá diference</th></tr>
<tr><td>x_1</td><td rowspan="2">$(\Delta_1 x)_1$</td><td rowspan="4">$(\Delta_2 x)_1$</td></tr>
<tr><td>x_2</td></tr>
<tr><td>x_3</td><td rowspan="2">$(\Delta_1 x)_2$</td></tr>
<tr><td>x_4</td></tr>
<tr><td>x_5</td><td rowspan="2">$(\Delta_1 x)_3$</td><td rowspan="4">$(\Delta_2 x)_2$</td></tr>
<tr><td>x_6</td></tr>
<tr><td>x_7</td><td rowspan="2">$(\Delta_1 x)_4$</td></tr>
<tr><td>x_8</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>

$\overline{\Delta_2 x} = \cdots$

Tab. 2: K výpočtu zrychlení tělesa na nakloněné rovině

Pro úplnost ještě dodejme, že v rozptylu druhých diferencí dráhy se projevuje vliv rušivých vlivů, působících na měření, z nichž nejvýznamnější je proměnlivá kvalita povrchu dráhy, po níž se těleso pohybuje.

Ad 2) Nejprve zjistíme okamžité rychlosti tělesa při průchodech jednotlivými branami. K tomu použijeme režim č. 4. Měřící jednotka udá vždy dobu, po kterou těleso prochází branou. Dělením délky tělesa touto dobou dostaneme rychlost tělesa, kterou vzhledem k jeho rozměrům můžeme oprávněně považovat za okamžitou. Protože známe vzdálenosti jednotlivých bran, snadno vykreslíme závislost okamžité rychlosti v tělesa na dráze x, kterou těleso urazilo, tedy funkci

$$v = v(x).$$

Grafem této funkce bude opět parabola s osou v ose x.

Nás však více zajímá závislost okamžité rychlosti na čase, tedy funkce

$$v = v(t).$$

Abychom mohli tuto funkci vykreslit, je potřeba znát okamžiky průchodu tělesa jednotlivými branami. Tyto okamžiky zjistíme, přepneme-li vyhodnocovací jednotku po provedení experimentu z režimu č. 4 do režimu č. 2. Nalezeným hodnotám času přiřadíme okamžité rychlosti tělesa, zjištěné v předchozím měření. Protože se jedná, jak víme, o pohyb rovnoměrně zrychlený, bude grafem funkce $v = v(t)$ přímka. Její směrnice je rovna zrychlení tělesa. Proložením přímky množinou naměřených bodů dosáhneme vyrovnání provedeného měření a získanou hodnotu zrychlení můžeme považovat za dostatečně spolehlivou.

Ad 3) V předchozích dvou úlohách jsme ukázali, jakým způsobem lze zjistit zrychlení tělesa při jeho pohybu po nakloněné rovině. Je však ještě potřeba vhodným způsobem zhodnotit přesnost těchto údajů, tedy zjistit jejich nejistotu. Vraťme se ke vzorci

$$a = \frac{\overline{\Delta_2 x}}{(\Delta t)^2},$$

z něhož zrychlení počítáme. Na nejistotě zrychlení, jak jsme řekli, se nejvíce podílejí nehomogenity povrchů. Ty mají nahodilý charakter a projevují se proto formou nejistot typu A a zatěžují právě údaje diferencí dráhy. Nejistoty diferencí dráhy $\Delta_2 x$ určíme obvyklým způsobem ze souboru hodnot této veličiny v tab. 2. Protože experiment neopakujeme, budou časové přírůstky Δt zatíženy především nejistotami typu B, které odpovídají nejistotám vyhodnocovací jednotky. Nejistotu zrychlení pak najdeme jako nejistotu vypočtené veličiny (nepřímé měření) a ta je závislá na nejistotách veličin $\Delta_2 x$ a Δt.

Nejistota zrychlení nalezená ze závislosti rychlosti na čase se najde z nejistot konstant přímky, kterou tuto závislost prokládáme. Tato metoda však překračuje rámec našeho praktika a nebudeme se jí dále zabývat. Spokojíme se se závěrem, že proložení přímky představuje dostatečné vyrovnání měření.

Ad 4) V teoretické části byl odvozen vzorec pro zrychlení tělesa na nakloněné rovině za přítomnosti dynamického tření. Je to výraz

$$a_x = g(\sin\alpha - f_d \cos\alpha).$$

Úhel α je úhel sklonu roviny. Odtud vychází pro koeficient dynamického tření f_d vztah

$$f_d = tg\alpha - \frac{a_x}{g\ \cos\alpha}.$$

Velikost zrychlení tělesa a_x známe z předchozích měření. Úhel sklonu roviny α vypočteme z výšky v krajního bodu nakloněné roviny a její délky l. Odtud je

$$\sin\alpha = \frac{v}{l}.$$

Význam jednotlivých veličin je patrný z obr. 1.

Ad 5) Za rovnováhy na nakloněné rovině platí opět vztah uvedený v teoretické části

$$F_t = G_x.$$

Zde je ovšem tření

$$F_t = f_s N,$$

kde f_s značí koeficient statického tření. Vzhledem k tomu, že za rovnováhy je $a_x = 0$, plyne z podmínky rovnováhy ve směru osy x vztah

$$f_s N = G_x$$

Zde je $\quad G_x = G\sin\alpha \qquad N = G\cos\alpha.$

Význam veličin je opět patrný z obr. 1. Odtud vychází

$$f_s = \tan\alpha.$$

Pomalým zvětšováním výšky v dojdeme k mezní hodnotě úhlu α, kdy dojde k odtržení tělesa od podložky a jeho volnému pohybu. Mezní úhel odpovídá stavu, kdy statické tření přestává být schopné udržet těleso v klidu a odpovídá mu maximální hodnota koeficientu statického tření, která je

$$f_s = \tan\alpha_{max}.$$