
Závislost doby kmitu desky na poloze osy otáčení

Zadání

1. Změřte dobu kmitu desky T a určete její nejistotu ΔT pro několik různých vzdáleností l těžiště od osy otáčení.
2. Vytvořte graf závislosti doby kmitu T na vzdálenosti l . Do grafu rovněž vyznačte vypočítané nejistoty ΔT formou chybových úseček.
3. Je-li to možné, pokuste se z grafu určit i poloměr setrvačnosti.

Teoretický rozbor:

Při měření periodické veličiny s krátkou periodou (např. při měření dějů trvajících cca 1 s stopkami) bývá z hlediska přesnosti výhodné neměřit jednu periodu, ale několik po sobě jdoucích period. Pro další zvýšení spolehlivosti měření je nutné takové měření několikrát opakovat, což nám umožní i určit nejistotu naměřené veličiny. Za předpokladu, že se doba kmitu desky v průběhu kývání nemění (což bude splněno), lze tento postup využít i pro splnění prvního bodu zadání. Při měření doby příliš velkého počtu kmitů (např. sta nebo více) není zaručené, že nedojde k omylu určení jejich počtu, protože sledovat a počítat tolik kmitů je únavné. Je však výhodné měřit například dobu deseti kmitů. Tím získáme dobu jednoho kmitu s desetkrát větší přesností, než při měření kmitu jednoho.

Nejvhodnějším praktickým postupem je porovnání polohy značky na kývající se desce se značkou na předmětu před (nebo za) deskou umístěnou do polohy, kdy rychlost míjení značek je největší. Dobře viditelné značky nemohou být bodové a intervaly rozměrů obou značek se potkávají nejkratší dobu při největší rychlosti pohybu desky. Opakovaným měřením doby deseti kmitů $10T_i$ kývající se desky, kde index i určuje pořadové číslo měření a nabývá postupně hodnoty $1, 2, \dots, n$ (ve zde uváděném případě $n = 5$) byly naměřeny hodnoty, umístěné ve druhém sloupci následující tabulky.

i	$10T_i / \text{s}$	T_i / s	$T_i - \bar{T} / \text{s}$	$(T_i - \bar{T})^2 / \text{s}^2$
1	8,53	0,853	-0,0062	0,00003844
2	8,66	0,866	0,0068	0,00004624
3	8,56	0,856	-0,0032	0,00001024
4	8,65	0,865	0,0058	0,00003364
5	8,56	0,856	-0,0032	0,00001024
Σ	42,96	4,296	0,0000	0,00013880

Třetí sloupec obsahuje vypočtené doby jednoho kmitu. Rozptyl mezi jednotlivými naměřenými hodnotami je způsoben v podstatě osobní chybou experimentátora, který nedokáže stisknout stopky na začátku měření stejně hbitě jako na konci měření. Je-li na konci měření pomalejší, naměří delší dobu než je doba skutečná, je-li na konci měření pohotovější a stiskne rychleji než na začátku, je naměřená doba kratší než skutečná. Větší hodnotu než skutečnou naměříme se stejnou pravděpodobností jako menší a větší odchylky od průměrné hodnoty jsou méně pravděpodobné než menší. To opravňuje k tvrzení, že k pravé (rozuměj skutečné) hodnotě T je nejbližší aritmetický průměr naměřených hodnot tedy

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = \frac{4,296}{5} = 0,8592 \text{ s.}$$

Statistické zákony se na souboru měření projeví tím průkazněji, čím větší je soubor měření. Našich pět hodnot je pouze malým výběrem, který neumožňuje stanovit dostatečně přesný průběh rozdělení naměřených hodnot okolo střední hodnoty. Ze zkušenosti můžeme usoudit, že měřené hodnoty doby kmitu mají normální (Gaussovo) rozdělení, které je blíže popsáno v materiálu o zpracování nejistot měření. Pro normální rozdělení určíme **výběrovou směrodatnou odchylku střední hodnoty**, která se pro n naměřených hodnot T_i vypočítá dosazením do vztahu

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2} = \sqrt{\frac{0,0001388}{5 \cdot 4}} \doteq 0,0026 \text{ s.} \quad (1)$$

V našem příkladu najdeme součet čtverců odchylek v posledním řádku posledního sloupce tabulky. Interval okolo střední hodnoty $\bar{T} \pm \sigma_s$ obsahuje veličinu T (kterou bychom teoreticky počítali z nekonečného počtu měření) s pravděpodobností 68% za předpokladu, že počet měření je dostatečně velký. Prakticky vyhovuje nejméně třicet měření. Při menším počtu měření se pravděpodobnost snižuje (pro méně než deset měření dosti výrazně).

V metrologii je zvykem stanovit interval, který by obsahoval pravou hodnotu T s pravděpodobností 95%. Proto ke stanovení velikosti **rozšířené nejistoty** $\Delta_A \bar{T}$ vybereme koeficient k pro konfidenční pravděpodobnost 95% podle počtu měření z následující tabulky, vybrané z takzvaného Studentova rozdělení.

Tabulka součinitelů k pro konfidenční 95% interval pravděpodobnosti n měření.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	60	120	∞
k	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,20	2,14	2,09	2,04	2,00	1,98	1,96

Pro pět měření kmitů kývajících se desky použijeme z tabulky koeficient $k = 2,78$ a vypočteme rozšířenou nejistotu typu A

$$\Delta_A \bar{T} = k \cdot \sigma_s = 0,007228 \text{ s} \doteq 0,007 \text{ s.}$$

Nejistoty typu B jsou našim případem dány přesností elektronických stopek a počtem zobrazovaných číslic. Dle údajů výrobce je první zmíněná nejistota $\Delta_{B1} T = 10^{-6} \text{ s}$ a jelikož lze odečítat naměřený čas na setiny sekundy, má nejistota doby deseti kmitů velikost $0,005 \text{ s}$, takže odpovídající nejistota doby jednoho kmitu je $\Delta_{B2} T = 0,0005 \text{ s}$. Celkovou nejistotu kmitavé periody vypočteme vztahem

$$\Delta T = \sqrt{[\Delta_A T]^2 + [\Delta_{B1} T]^2 + [\Delta_{B2} T]^2} \doteq 0,007 \text{ s,} \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že velikost obou nejistot typu B je řádově menší než nejistota typu A, jsou odpovídající sčítance pod odmocninou ve vztahu (2) zanedbatelně malé a výsledná nejistota je v tomto případě shodná s nejistotou typu A.

Změřenou dobu kmitu zapíšeme ve tvaru

$$T = (0,859 \pm 0,007) \text{ s.}$$

Přesnost je zde větší, než je počet odečtených číslic za desetinou čárkou u stopek v důsledku využití periodicky navazujících kmitů.

Pokud změříme shora uvedeným způsobem dobu kmitu pro různé vzdálenosti l těžiště desky od osy otáčení a vyneseme závislost $T(l)$ do grafu, zjistíme, že tato funkce má pro určitou vzdálenost minimální hodnotu $l = R_s$. Vzdálenost R_s nazýváme **poloměr setrvačnosti** a více se o ní dozvíme v úloze *Moment setrvačnosti tělesa*.