
Zápis číselných hodnot a nejistoty měření

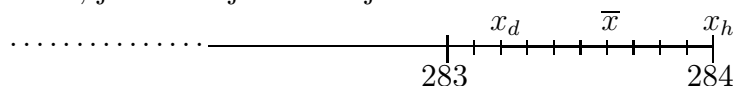
Zápis číselných hodnot

Naměřené hodnoty zapisujeme jako číselný údaj s určitým konečným počtem číslic. Očekáváme, že všechny zapsané číslice jsou správné a vyjadřují tak i tak zvanou **nejistotu** hodnoty fyzikální veličiny nebo konstanty. Jestliže poslední zapsaná číslice není spolehlivá, musíme velikost nejistoty uvést.

Např. označíme-li délku měřeného předmětu x a tuto délku změříme s nejistotou Δx bude zápis v případě $x = 283,6 \text{ mm}$, $\Delta x = 0,4 \text{ mm}$ mít formu

$$x = (283,6 \pm 0,4) \text{ mm}.$$

Délka x tedy není určitá (bodová) hodnota, ale interval od dolní hodnoty $x_d = 283,2 \text{ mm}$ do horní hodnoty $x_h = 284,0 \text{ mm}$, jak ukazuje následující obrázek.



Do zveřejňovaných tabulek číselných konstant a jiných veličin se zapisuje jenom tolik číslic, aby i poslední číslice byla správná. Například v tabulkách uvedená hodnota $\sqrt{2} = 1,41$, u které jsme nenalezli zápis na více číslic, má nejistotu 0,005, tedy pro naše případné výpočty je $\sqrt{2} = 1,410 \pm 0,005$.

Je zřejmé, že číslo z našeho posledního příkladu je iracionální podobně jako např. Ludolfovo číslo π . Pravou (skutečnou) celou hodnotu iracionálního čísla nedokážeme zapsat a použít v numerických výpočtech, ani kdybychom ji teoreticky znali. Kdyby přesná válcová tyč měla poloměr vyjádřený konečným přesným číslem, potom plocha podstavy (případně obvod) bude vyjádřen iracionálním číslem. Pracovat s čísly, která jsou vyjádřena konečným počtem číslic a uvádění velikosti nejistoty je prakticky nutností.

Povšimněme si způsobu zápisu číselných hodnot fyzikálních veličin. Poslední číslice číselné hodnoty veličiny má stejný řád jako je řád poslední číslice nejistoty. Nejistotu píšeme obvykle jenom jednou číslicí. Jenom v případě, že touto číslicí je 1 nebo 2, připojuje se ještě druhá platná číslice (a to i u veličiny), neboť mezi nejistotou vyjádřenou jedničkou a dvojkou je až stoprocentní rozdíl, kdežto např. mezi 8 a 9 je rozdíl maximálně 12 %.

Někdy je vhodné vyjádřit tzv. **relativní nejistotu**

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}.$$

Relativní nejistota je bezrozměrná veličina. Často je však uváděna v procentech $\delta x = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$.

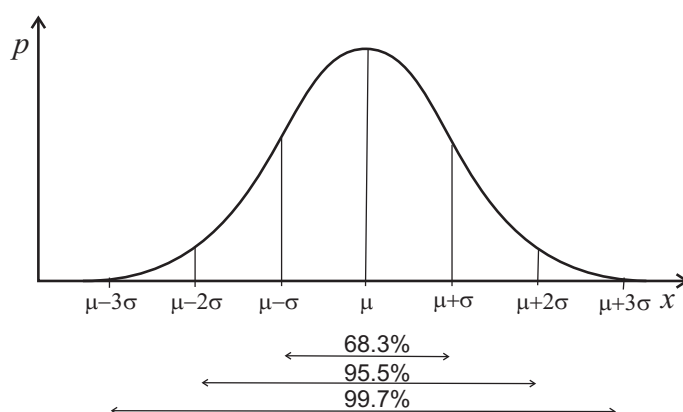
Jestliže veličina má relativní nejistotu blízkou 1 tj. 100% je nejistota stejně velká jako veličina a tehdy je měření zpravidla bezcenné. Velmi často bývá relativní nejistota v hodnotách několika málo procent. Přesná měření mají relativní nejistotu ve zlomcích procenta.

Rozdělení naměřených hodnot

Opakovaným měřením veličiny x získáme soubor naměřených hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n$, které se mohou navzájem lišit i přesto, že měření probíhalo za stejných podmínek. Soubor naměřených hodnot se bude při dostatečně velkém počtu měření ($n \rightarrow \infty$) řídit určitými statistickými zákonitostmi. Např. naměřená hodnota x_i se vyskytne v tomto souboru $n \cdot p(x_i)$ krát, když $p(x_i)$ označuje takzvanou hustotu pravděpodobnosti výskytu jednotlivých měření x_i . Závislost $p(x)$ bývá nazývána pravděpodobnostní funkcí.

Pro fyzikální měření je typické tzv. normální (Gaussovo) rozdělení (či rozložení) pravděpodobnosti, které je znázorněno na obr. 1 a jež lze vyjádřit

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1)$$



Obrázek 1: Gaussova křivka pro normální rozdělení naměřených hodnot

Předpokladem pro použití normálního rozdělení je, že spojitá náhodná veličina se utváří pod vlivem mnoha vzájemně nezávislých činitelů, z nichž žádný nemá na výsledek rozhodující vliv. Normální rozdělení se univerzálně používá k aproximaci (k přibližnému vyjádření) rozdělení pravděpodobnosti velkého množství náhodných veličin v biologii, ekonomii, technice, atd. Jeho parametry jsou **střední hodnota** μ a **rozptyl** (disperze) $D(s^2, \sigma^2)$, které jsou určeny vztahy

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{a} \quad D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Z obr. 1 je patrné, že hodnoty blízké μ budou v souboru zastoupeny častěji než hodnoty odlišnější a hodnoty větší než μ lze očekávat se stejnou pravděpodobností, jako hodnoty menší.

Pokud stanovíme **směrodatnou odchylku** střední hodnoty

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2},$$

bude v intervalu $\mu \pm \sigma$ ležet asi 68,3% všech naměřených hodnot. Interval $\mu \pm 2\sigma$ pak bude obsahovat 95,5% a interval $\mu \pm 3\sigma$ až 99,7% naměřených hodnot.

Za předpokladu, že měřená veličina x má určitou přesnou hodnotu a podmínky měření jsou optimální (spolehlivá metoda, přesné měřicí přístroje atd.), reprezentuje střední hodnota μ správnou (pravou, přesnou) hodnotu X měřené veličiny.

Nejistoty měření.

Nejistota měření je parametr (přidružený k výsledku měření) charakterizující rozptýlení hodnot měřené veličiny. Základní kvantitativní charakteristikou nejistoty měření je **standardní nejistota**. Může mít i více příčin a podle nich dělíme nejistoty do dvou základních skupin:

- **nejistoty typu A** ($\Delta_A x$), projevující se drobnými odchylkami výsledků při opakovaných měřeních (jejichž příčiny se obecně považují za neznámé) a na
- **nejistoty typu B** ($\Delta_B x$), kdy sice při opakovaných měřeních dostaneme vždy stejný výsledek, ale ten je zkreslený buď nepřesností použitého měřidla, nebo nevhodnou metodou měření, nebo nedokonalostí lidského smyslu při odečítání na měřidle nebo jeho ovládání, apod.

Vyhodnocení nejistot typu A

Nejistoty typu A jsou stanoveny z výsledků opakovaných měření statistickou analýzou série naměřených hodnot. Statistické zákony se projeví tím průkazněji, čím větší je soubor měření. V laboratořích však budeme zpravidla provádět malý počet opakovaných měření (často i $n < 10$). Těchto několik hodnot je pouze malým výběrem, který neumožňuje stanovit dostatečně přesný průběh rozdělení naměřených hodnot základního souboru ani jeho střední hodnotu (a tedy ani přesnou hodnotu měřené veličiny). Naší snahou proto bude stanovit interval, který bude s určitou zvolenou pravděpodobností pravou hodnotu X obsahovat.

Je oprávněné předpokládat, že pravé hodnotě X je nejbližší aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2)$$

naměřených hodnot x_i (**výběrový průměr**).

Výběrový rozptyl aritmetického průměru (rozptyl výběrových průměrů) $D(\bar{x})$ je n krát menší než výběrový rozptyl jednoho měření $D(x)$. **Výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru** (směrodatná odchylka výběrových průměrů) $\sigma(\bar{x})$, která je považována za standardní nejistotu typu A se proto vypočítá takto:

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{D(x)}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3)$$

V metrologii je zvykem stanovit interval, který by obsahoval pravou hodnotu X s pravděpodobností 95%. Proto stanovujeme tzv. **rozšířenou nejistotu** $\Delta_A \bar{x} = k \cdot \sigma(\bar{x})$.

Koeficient k pro konfidenční pravděpodobnost 95% závisí na počtu měření, jak je vidět z následující tabulky, vybrané z takzvaného Studentova rozdělení.

Tabulka součinitelů k pro konfidenční 95% interval pravděpodobnosti n měření.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	60	120	∞
k	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,20	2,14	2,09	2,04	2,00	1,98	1,96

Vyhodnocení nejistot typu B

Standardní nejistota typu B se odhaduje pomocí úsudku na základě dostupných informací a zkušenosti. Nejčastěji se použijí:

- údaje výrobce měřicí techniky (technické parametry použitého zařízení, např. třída přesnosti elektromechanického (ručkového) měřicího přístroje nebo dvojice konstant charakterizujících chybu číslicového měřicího přístroje, například teploměru),
- zkušenosti z předchozích měření,
- zkušenosti s vlastnostmi chování materiálů a techniky a poznatky o nich,
- údaje získané při kalibraci a z certifikátů,
- nejistoty referenčních údajů v příručkách.

Pro každý uvažovaný zdroj nejistot se stanoví dílčí nejistota typu B $\Delta_{B_i}x$ a výsledná nejistota se pak určí z dílčích nejistot jako

$$\Delta_B x = \sqrt{(\Delta_{B_1}x)^2 + (\Delta_{B_2}x)^2 + \dots} \quad (4)$$

Vyhodnocení kombinované nejistoty

Výslednou nejistotu veličiny x (tzv. kombinovanou nejistotu) vypočteme podle vztahu

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta_A x)^2 + (\Delta_B x)^2} \quad (5)$$

a naměřenou hodnotu veličiny x vyjádříme zápisem

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x).$$

Nejistoty veličin získaných nepřímo (výpočtem)

Pokud je veličina y funkcí několika veličin x_i (nebo hodnot jedné veličiny) $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a známe nejistotu Δx_i každé z těchto veličin, lze střední hodnotu $\bar{y}$ veličiny y vypočítat ze středních hodnot veličin x_i

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

a její nejistotu určit ze vztahu

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}. \quad (6)$$

(Zákon šíření nejistot)

Podmínkou ovšem je, že veličiny x_i mají všechny normální rozdělení a nejsou korelované (není mezi nimi vzájemný vztah).

Vážený průměr

Při měření některých veličin máme možnost využít několika různých metod (nebo postupů, podmínek měření, ...) pro určení jedné konkrétní hodnoty y . V takovém případě často dostaneme z každého měření trochu jiný výsledek. Pokud by se lišily jen střední hodnoty těchto měření ale nejistoty byly stejné, bylo by možné ze získaných středních hodnot určit výslednou hodnotu měřené veličiny běžným aritmetickým průměrem. Pokud se ale výsledky liší i svými nejistotami, je nutné použít tzv. **vážený průměr**.

Předpokládejme, že jsme různými metodami získali několik výsledků $\bar{y}_1 \pm \Delta y_1, \bar{y}_2 \pm \Delta y_2, \dots, \bar{y}_n \pm \Delta y_n$. Hodnotu jejich váženého průměru pak vypočítáme podle vztahu

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n g_i}, \quad (7)$$

kde g_i představuje váhu i -tého měření. Tato hodnota musí záviset na velikosti nejistoty a to pochopitelně tak, že přesnější měření (s menší nejistotou) musí mít větší váhu. Váhu i -tého měření stanovíme

$$g_i = \frac{1}{(\Delta y_i)^2}.$$

Nejistota váženého průměru se posléze odhadne užitím vztahu (6) takto

$$\Delta y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n g_i^2 (\Delta y_i)^2}{\left(\sum_{i=1}^n g_i\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n g_i}}. \quad (8)$$