
Statistické vlastnosti radioaktivního zářiče

Zadání

1. Pro dva různé časové intervaly opakovaně změřte počet detekovaných částic z radioaktivního zářiče
2. Pro oba soubory hodnot stanovte bodovými odhady střední hodnotu a disperzi.
3. Srovnajte apriorní a aposteriorní četnosti jednotlivých hodnot každého souboru a rozhodněte, zda byl k sestavení histogramů použit dostatečný počet měření, jak jej vyžaduje zákon velkých čísel.

Teoretický rozbor:

V atomistice se setkáváme převážně s kolektivními jevy, tedy jevy, jichž se účastní vždy velký počet jedinců. Jejich popis vyžaduje používat statistických zákonů. Ukážeme zde použití statistiky na příkladu radioaktivního rozpadu zářiče. Budeme pracovat s radioaktivním zářičem, tvořeným souborem N atomů stejného radionuklidu, který má poločas přeměny T a emituje pouze záření β . Při radioaktivní přeměně (rozpadu) tohoto zářiče se radionuklid přemění na stabilní radionuklid a během této přeměny je z jádra emitován elektron. Emitované elektrony jsou vysílány všemi směry rovnoměrně a ty které míří směrem do detekční Geigerovy-Müllerovy (GM) trubice jsou zaznamenány detektorem. Každá β částice při průchodu GM-trubicí vyvolá jeden impuls přenesený v detektoru do paměti, kde se přičítá k předchozím. Po zastavení detektoru je na jeho číselnici počet zaznamenaných impulsů během měřené doby.

Kdybychom měření opakovali několikrát za sebou se stejným časovým intervalem Δt , který si zvolíme podstatně kratší než je poločas přeměny zářiče, mohlo by se zdát, že naměříme stejné hodnoty. Detektor přesně zaznamenává všechny průchody záření GM-trubicí a obsahuje velmi přesnou časomíru, kterou můžeme předem nastavit pro dobu Δt záznamu impulsů. Naměřené výsledky se však budou lišit a četnost naměřených hodnot (to jest pravděpodobnost naměření určitého počtu impulsů) vykazuje určitou zákonitost.

Počet ΔM atomů radionuklidu, které se radioaktivně přeměnily (rozpadly) v době Δt je nepochybně přímo úměrný této době a také přímo úměrný počtu atomů radionuklidu M . ΔM představuje úbytek počtu atomů M a má tedy zápornou hodnotu. Označíme-li konstantu úměrnosti λ , platí rovnice

$$-\Delta M = \lambda M \Delta t, \quad (1)$$

kde λ má název **přeměnová konstanta** s jednotkou $[\text{s}^{-1}]$. Nahradíme-li konečné přírůstky infinitezimálně malými, předchozí rovnice je diferenciální rovnicí a její matematické řešení je ve tvaru

$$M = M_0 e^{-\lambda t}, \quad (2)$$

kde M_0 je počáteční počet atomů radionuklidu a M je počet atomů téhož radionuklidu po době t . Uvedený vztah se nazývá přeměnový zákon. Za dobu T , zvanou poločas přeměny, klesne počet atomů radionuklidu na polovinu původní hodnoty

$$\frac{1}{2} M_0 = M_0 e^{-\lambda T}. \quad (3)$$

Přeměnovou konstantu λ pak lze vyjádřit pomocí poločasu přeměny T jako

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}. \quad (4)$$

Jestliže poločas přeměny našeho radionuklidu je 30 roků, je doba měření 30 minut zanedbatelně krátkou dobou pro to, aby počet radionuklidů během uvedených 30 minut měření znatelně poklesl.

Proč tedy nezískáme opakovaným měřením stejné hodnoty ΔM během stejné doby Δt ? Protože radioaktivní přeměna nestabilních jader atomů radionuklidu je náhodný proces. Pro každé jádro atomu radionuklidu je jistá pravděpodobnost p , že se během doby měření Δt radioaktivně přemění. Protože během poločasu přeměny T je tato pravděpodobnost $p = 0,5$, je pro podstatně menší dobu Δt podstatně menší velikost pravděpodobnosti přeměny. Blízko jedné je pravděpodobnost q , že se určité jedno jádro atomu radioaktivně nepřemění. Jádro se určitě během naší doby přemění nebo nepřemění, takže $p + q = 1$.

Poznamenejme ještě, že pro naše měření není počáteční hodnotou celý počet M_c atomů radionuklidu, ale

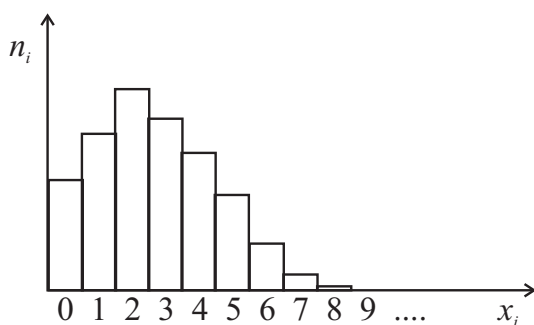
$$M_0 = \frac{\Omega}{4\pi} M_c, \quad (5)$$

kde Ω je prostorový úhel, pod kterým je z místa zářiče zasahována Geigeova-Müllerova trubice v porovnání k celému prostorovému úhlu, jenž má velikost 4π . Jinak by trubice musela detekovat záření ve všech směrech.

Naměřené počty impulsů budou mít pochopitelně rozložení celočíselné, **diskrétní**. Abychom získali představu o rozložení nahodilé veličiny, provedeme N pokusů. Při nich získáme postupně k navzájem různých hodnot $x_1, x_2, \dots, x_k$ příslušné veličiny, které jsou, jak jsme řekli celočíselné. Řekněme, že hodnota x_1 se vyskytne v sérii pokusů právě n_1 -krát. Podobně hodnota x_2 se vyskytne n_2 -krát atd. Počty výskytů jednotlivých hodnot nahodilé veličiny nazýváme jejich **četnostmi**. Pro četnosti n_i jednotlivých hodnot musí samozřejmě platit

$$\sum_{i=1}^k n_i = N. \quad (6)$$

Z hodnot x_i a n_i vytvoříme sloupcový diagram, jak ukazuje obr.(1).



Obr. 1: Histogram četností naměřených hodnot

Sloupcový diagram, který přiřazuje jednotlivým hodnotám nahodilé veličiny počty jejich výskytů, nazýváme histogramem daného rozložení. Když četnosti n_i dělíme počtem všech pokusů N , dostáváme relativní četnosti

$$y_i = \frac{n_i}{N}. \quad (7)$$

Relativní četnosti splňují podmínku

$$\sum_{i=1}^k y_i = 1.$$

Říkáme, že relativní četnosti jsou normovány k jedné. Pravděpodobnost výskytu hodnoty x_i v souboru je definována vztahem

$$p_i = \frac{n_i}{N}. \quad (8)$$

Srovnáním této definice s (7) vidíme, že relativní četnosti jsou rovny pravděpodobnostem výskytu příslušných hodnot nahodilé veličiny, tedy

$$p(x_i) = y_i. \quad (9)$$

Pro různé hodnoty veličiny x bývají různé i pravděpodobnosti jejich výskytu. To znamená, že pravděpodobnost p výskytu jednotlivých hodnot veličiny je funkcí jejich velikostí. Funkce $p(x_i)$ se nazývá frekvenční funkcí daného rozložení. Frekvenční funkce udává rozložení pravděpodobnosti uvnitř souboru. Je charakteristikou každého souboru, odlišuje jej od všech ostatních a dává nejúplnější informaci o něm. Jestliže známe frekvenční funkci souboru, můžeme stanovit pravděpodobný počet výskytů určité hodnoty v souboru. Počet výskytů hodnoty x_i v souboru N pokusů by měl být

$$n_i = Np(x_i). \quad (10)$$

Vraťme se však k radioaktivnímu rozpadu. Ten má následující vlastnosti:

1. K rozpadu atomu může dojít v libovolném časovém okamžiku.
2. Počet rozpadlých atomů je úměrný délce zvoleného časového intervalu.
3. Poněvadž vždy sledujeme jen určitý druh radioaktivní přeměny, nemůže dojít k rozpadu jednoho atomu vícekrát než jednou.

To jsou předpoklady, za nichž se vytváří **Poissonovo** rozložení. Proto se radioaktivní rozpad látek řídí Poissonovou statistikou. Podle ní se může každá celočíselná nezáporná hodnota x_i nahodilě veličiny objevit n_i - krát. **Frekvenční funkce** Poissonova rozložení je tvaru

$$p(x_i) = \frac{\mu^{x_i}}{x_i!} e^{-\mu}. \quad (11)$$

Poissonovo rozložení je charakterizováno jedinou konstantou μ . Nazýváme je proto rozložením jedno-parametrickým. Frekvenční funkce $p(x_i)$ udává rozložení **apriorní** (teoretické, předem dané) pravděpodobnosti. Odtud najdeme nejpravděpodobnější počty výskytu veličiny x . Ty jsou, dosadíme-li do (10) frekvenční funkci (11)

$$n_i = N \frac{\mu^{x_i}}{x_i!} e^{-\mu}. \quad (12)$$

I když frekvenční funkce dává úplnou informaci o statistickém souboru, pro praktické účely volíme jednodušší charakteristiky souboru. Zpravidla jsou to střední hodnota a disperze souboru. Na definici obou veličin se podílí právě frekvenční funkce. U diskrétní nahodilé veličiny x je **střední hodnota** $E(x)$ definována vztahem

$$E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) \quad (13)$$

a **disperze** $D(x)$ vztahem

$$D(x) = \sum_{i=1}^{\infty} [x_i - E(x)]^2 p(x_i). \quad (14)$$

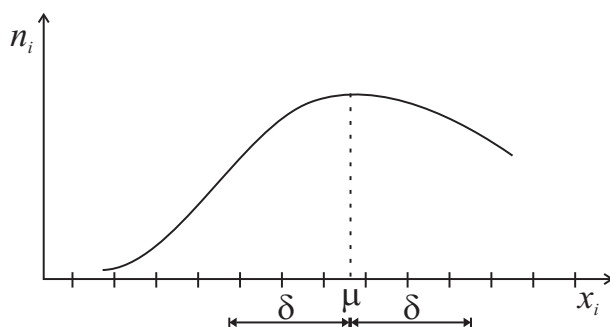
Připomeňme ještě, že disperze zachycuje rozptyl hodnot souboru kolem střední hodnoty. U Poissonova rozložení platí

$$E(x) = D(x).$$

Konstanta μ , která vystupuje ve frekvenční funkci (11), je současně střední hodnotou i disperzí souboru.

Průběh frekvenční funkce u Poissonova rozložení není symetrický. Poissonovo rozložení je diskrétní. Jestliže si jednotlivé hodnoty x_i veličiny, která je vytváří, znázorníme na ose x , dostaneme posloupnost stejně vzdálených bodů, jak ukazuje obr. 2.

Na ose vyznačíme i střední hodnotu μ této veličiny. Kolem střední hodnoty vytvoříme dva intervaly stejné šířky δ , levý $< \mu - \delta; \mu >$ a pravý $< \mu; \mu + \delta >$. Každý z intervalů pak obsahuje stejný počet hodnot x_i . Každé hodnotě x_i odpovídá n_i výskytů, kde n_i je dáno vztahem (12). Vezměme dvě hodnoty symetricky položené vzhledem ke střední hodnotě $x_i^{(L)}$ v levém intervalu a $x_i^{(P)}$ v pravém intervalu. Vzhledem k asymetrii Poissonova rozložení bude vždy počet výskytů $n_i^{(P)}$ veličiny v pravém intervalu větší než počet



Obr. 2: Poissonovo rozdělení

výskytů $n_i^{(L)}$ v levém intervalu. Když sečteme počet výskytů všech hodnot v levém intervalu, dojdeme k číslu N_1 . Tentýž součet v pravém intervalu dává číslo N_2 . U Poissonova rozložení vždy platí

$$N_1 < N_2, \quad (15)$$

opět vzhledem k jeho asymetrii. Požadujeme-li naopak, aby bylo $N_1 = N_2$, musí mít intervaly, příslušné těmto hodnotám, různé šířky δ_L a δ_P . Se zvětšující se střední hodnotou μ se asymetrie Poissonova rozložení zmenšuje a $\delta_L \rightarrow \delta_P$. Celkový počet výskytů v každém z intervalů je závislý na velikosti střední hodnoty a šířce intervalu. S šířkou intervalů počty výskytů vzrůstají. Jestliže je střední hodnota μ dostatečně velká, v praxi to bývá již při $\mu > 60$, pak můžeme pro daný počet výskytů klást $\delta_L = \delta_P$. Chceme-li utvořit kolem střední hodnoty μ interval, který by obsahoval 95% ze všech N pokusů, musel by mít šířku ΔN , tedy interval $< \mu - \delta; \mu + \delta >$ a pro jeho šířku by platilo

$$\Delta N = 2\sqrt{N}. \quad (16)$$

Chceme-li však stanovit střední hodnotu a disperzi souboru naměřených hodnot, užíváme tzv. **bodových odhadů**. Bodové odhady vyjadřují tyto hodnoty pomocí hodnot členů souboru. Jestli dosadíme do (13) z (8), střední hodnotu nahrazuje aritmetický průměr hodnot souboru. Tedy

$$E(x) = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (17)$$

Disperzi pak počítáme z kvadrátů odchylek od aritmetického průměru. Odtud

$$D(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (18)$$

Provedení experimentu:

- Zvolíme dva pevné časové intervaly a pro každý z nich změříme, kolik rozpadů během něj proběhlo. Tento pokus opakujeme, až získáme dostatečný počet údajů, tj. asi 200 pro každý časový interval. Z naměřených hodnot sestojíme histogramy obou rozložení.
- Stanovení základních charakteristik souboru. Pro obě skupiny stanovíme bodovými odhady střední hodnotu a disperzi podle vzorců (17) a (18).
- Srovnání apriorní a aposteriorní pravděpodobnosti. Četnosti, z nichž jsou sestaveny histogramy, se opírají o **aposteriorní** (experimentální) pravděpodobnost (8), protože byly zjištěny z opakovaných pokusů. Do histogramů doplníme četnosti, které vycházejí z apriorní pravděpodobnosti (12) za předpokladu, že dosadíme $\mu = \bar{x}$.