Vlnění

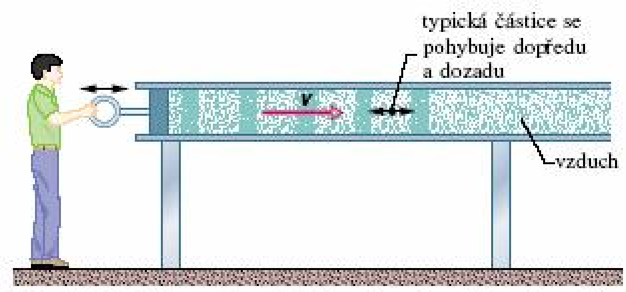
Mechanické vlnění

- **Je formou pohybu látkového prostředí. Elementy látky se při průchodu vlny vychylují ze svých rovnovážných poloh a pohybují se (kmitají) kolem nich většinou nepatrně.**
- **Změna deformace a napětí (mechanický rozruch) postupuje od jednoho elementu k druhému – postupné vlnění. takto se přenáší energie, hybnost, ...**

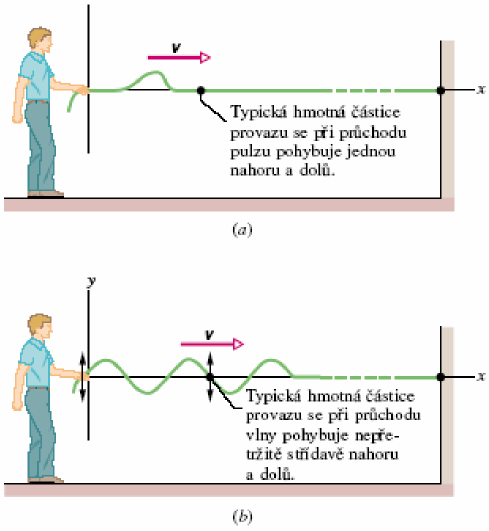
Kromě mechanických vln (elastické na pružině, tíhové na povrchu kapaliny, příčné na vlákně) existují i jiné (nemechanické) – elektromagnetické, gravitační, ... (vnikají pohybem zdrojů těchto polí).

Vlny jsou

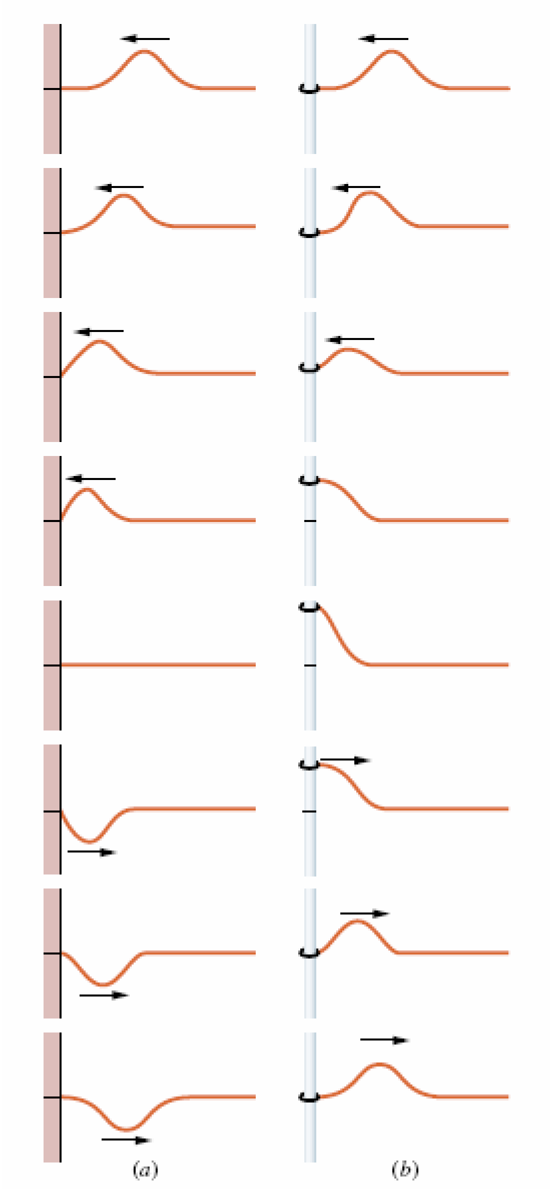
- **podélné – elementy ve a proti směru šíření rozruchu (tlaková vlna v plynovém či vodovodním potrubí)**



- **příčné – elementy kmitají kolmo na směr šíření rozruchu (deformace u mechanických vln se přenášejí smykovými silami mezi elementy, v tekutinách tedy neexistují).**



Odraz na rozhraní

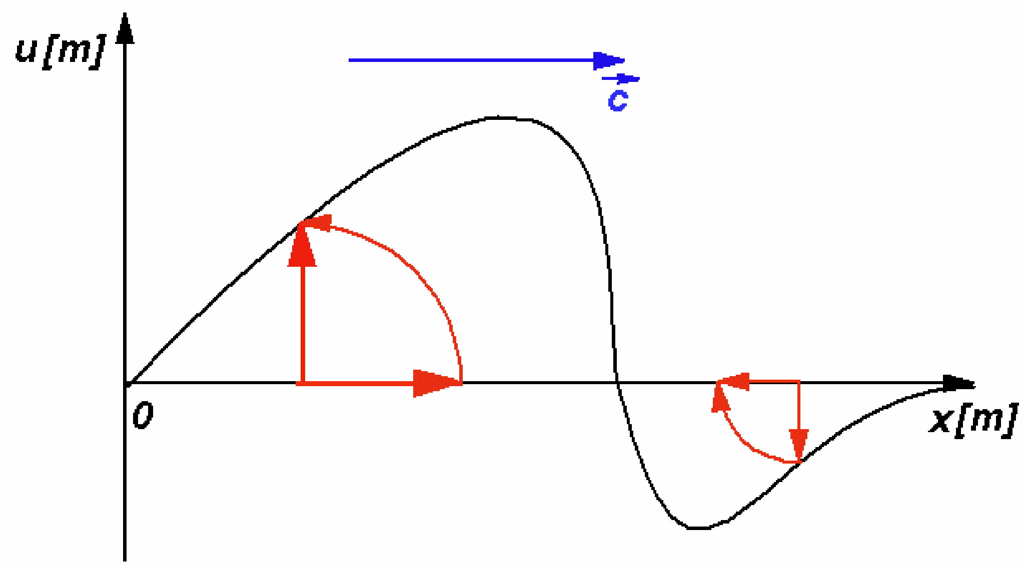


Základní pojmy:

1. **Výchylka elementu** $\vec{u}$ **- udává směr a velikost posunutí elementu prostředí z rovnovážné polohy při průchodu vlny.**

$$\vec{u} = \vec{f}(x, y, z, t).$$

Pokud $\vec{u}$ **je kolmé na směr šíření vlny (příčná vlna) a** $\vec{u}$ **leží v neměnné rovině, nazýváme vlnu lineárně polarizovanou.**



Jednorozměrný případ podélné vlny – snímek v čase t

2. Rychlost $\vec{v}$ elementu

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}.$$

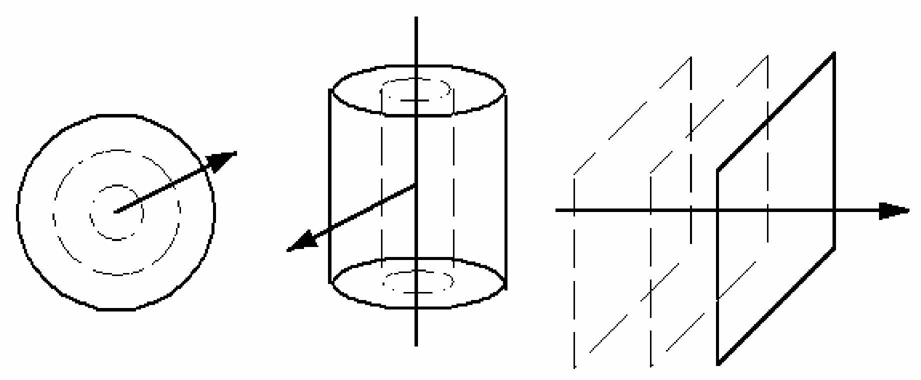
Pro podélnou i příčně lineárně polarizovanou vlnu leží $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jedné přímce.

3. Rychlost $\vec{c}$ vlnění – rychlost, se kterou postupuje rozruch. Závisí na setrvačných vlastnostech látky (hustotě) a na silách, kterými na sebe navzájem působí sousední elementy při lokální deformaci prostředí.

4. Čelo vlny - geometrické místo bodů ohraničujících vlnu (odděluje vlnu od částí prostoru, do nichž vlna ještě nepronikla).

5. **Vlnoplocha: zavádí se tehdy, když zdroj vlnění kmitá periodicky. Je to plocha, jejíž všechny body kmitají se stejnou fází.**

6. **Paprsek je křivka, podél které se šíří ve vlně energie. V izotropním prostředí jsou paprsky kolmé na vlnoplochy.**



Princip superpozice vlnění (experimentální fakt)

Nechť (v pružném prostředí) budí zdroj Z_1 vlnu $\vec{u}_1(x,y,z,t)$ a zdroj Z_2 vlnu $\vec{u}_2(x,y,z,t)$. Potom oba zdroje současně budí vlnu

$$\vec{u}(x,y,z,t)=\vec{u}_1(x,y,z,t)+\vec{u}_2(x,y,z,t).$$

Pozn.:

- **Princip superpozice vlnění platí pro libovolný počet zdrojů.**
- **Princip superpozice vlnění platí v prostředí, které splňuje Hookův zákon (tj. např. pro malé výchylky)**

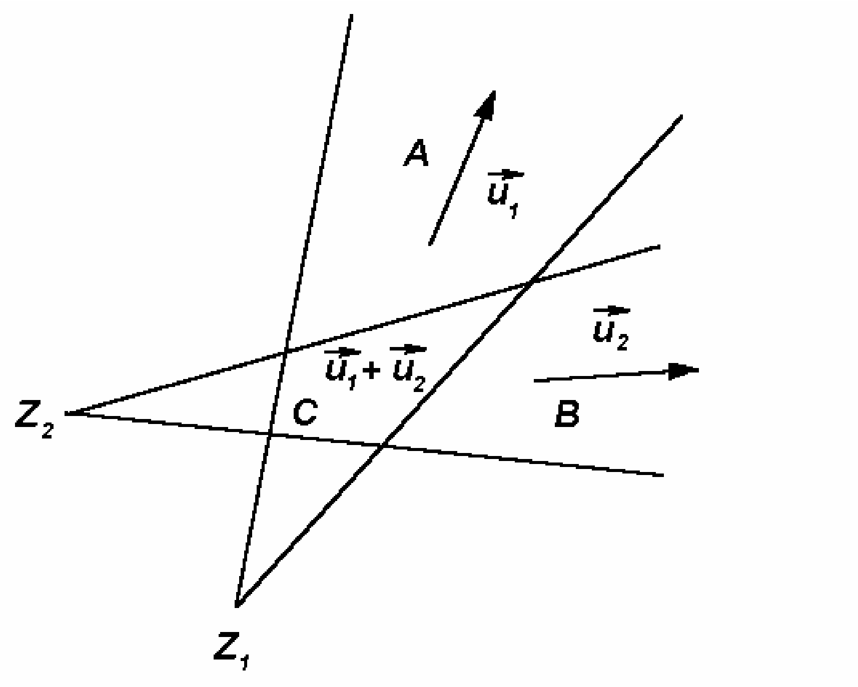
Důsledek principu superpozice vlnění:

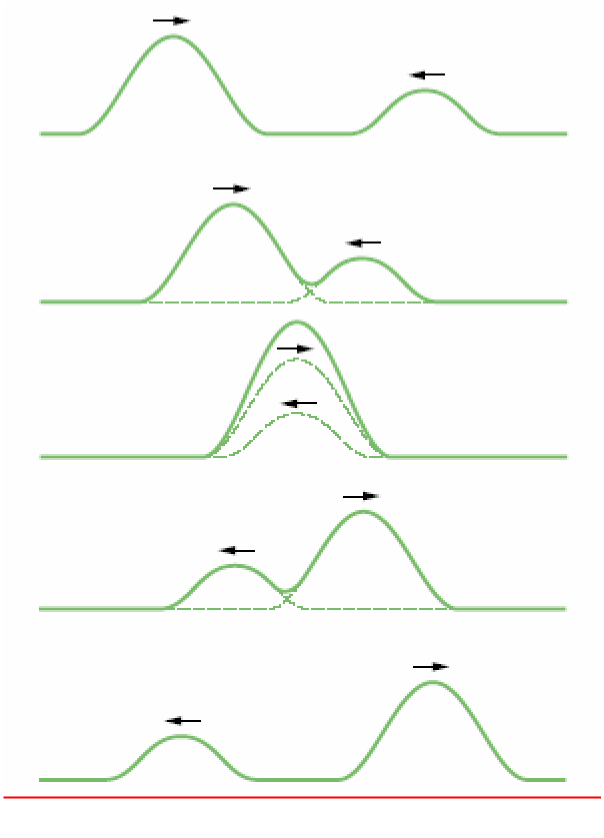
Oblast *C* (překryv) : $\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2$,

Oblast *A* ($\vec{u}_2=\vec{0}$) : $\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{0}=\vec{u}_1$, **!!!**

Oblast *B* ($\vec{u}_1=\vec{0}$) : $\vec{u}=\vec{0}+\vec{u}_2=\vec{u}_2$, **!!!**

Tedy vlnění se průchodem oblastí překryvu neovlivní


A
$\vec{u}_1$
$\vec{u}_2$
$\vec{u}_1 + \vec{u}_2$
Z_2
C
B
Z_1



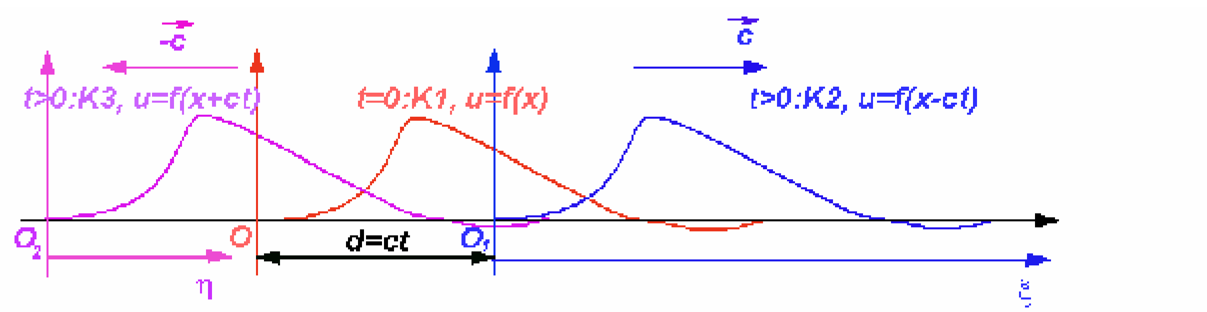
<u>Matematické vyjádření postupné vlny.</u>

Z experimentální zkušenosti plyne, že <u>vlny se</u> ve většině případů <u>šíří prostředím (prostorem) téměř beze změny</u> (zcela beze změny se šíří pouze v prostředích bez vnitřního tření, tj. útlumu). Tento fakt využijeme při matematickém vyjádření postupné vlny.

Vztah pro výchylku v jednorozměrné vlně určíme pro dvě možné situace:

1. **Známe tvar vlny v určitém okamžiku, např. v čase $t = 0$, tj. $u(x, t = 0) = f(x)$.**
2. **Známe závislost výchylky na čase v určitém bodě, např. $x = 0$, tj. $u(x = 0, t) = F(t)$**

<u>Ad. 1:</u>



a) vlna postupuje ve směru kladné osy *Ox:*
V okamžiku $t > 0$ je vlna znázorněna křivkou *K2* vzniklou z křivky *K1* posunutím o úsek $d = ct$ ve směru osy *Ox*. Výchylka je nyní $u = f(x)$, kde x je nová souřadnice.
Platí: $x = d + x = ct + x \Rightarrow x = x - ct$.
Tedy vlna šířící se ve směru <u>kladné</u> osy *Ox* je

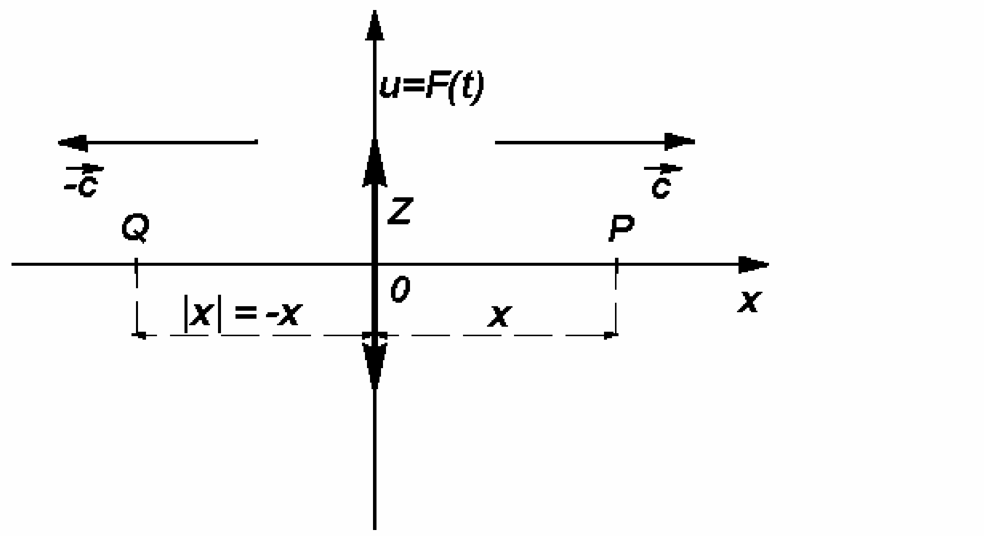
$$u = f(x - ct)$$

b) vlna postupuje ve směru záporné osy *Ox:*
V okamžiku $t > 0$ je vlna znázorněna křivkou *K3* vzniklou z křivky *K1* posunutím o úsek $d = ct$ ve směru záporné osy *Ox*. Výchylka je nyní $u = f(h)$, kde h je nová souřadnice.
Platí: $h = d + x = ct + x$.

Tedy vlna šířící se ve směru <u>záporné</u> osy *Ox* je

$$u = f\left(x + ct\right)$$

<u>Ad. 2:</u>



a) vlna postupuje ve směru <u>kladné</u> osy *x*:

Do bodu *P(x), x > 0* dorazí vlna v čase $t = \frac{x}{c}$**. Od tohoto okamžiku se začne bod *P* pohybovat tak, jak se pohyboval dříve bod *0*. Pohyb *P* bude vůči pohybu *0* zpožděn o** t **. Tedy jeho výchylka je :**

$$u_P = F\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

b) vlna postupuje ve směru <u>záporné</u> osy *x*:

Vlna dostihne bod *Q* o souřadnici *x < 0* v okamžiku $t = \frac{|x|}{c}$**, tj. jeho výchylka bude**

$$u_Q = F\left(t - \frac{|x|}{c}\right) = F\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Pozn.: Je-li zdroj vlny umístěn mimo bod *O*, tj. $Z(x = x_0)$**, je:**

$$u_P = F\left(t - \frac{|x - x_0|}{c}\right).$$

Harmonické vlny

Vznikají tehdy, když jejich zdroj kmitá harmonicky. Každý bod ve vlně koná rovněž harmonické kmity stejné frekvence jako zdroj.
Význam harmonických vln: Každou vlnu obecného tvaru lze vyjádřit jako součet harmonických vln o vhodných amplitudách a fázích – Fourierova analýza.

Matematické vyjádření:
Nechť zdroj *Z* je v počátku souř. soust., tj. $x_z = 0$, rychlost šíření vlny je *c*.
Kmity zdroje: $u(0,t) = A\sin(wt + a)$
Podle předchozího výkladu (ad.2) je:

- **vlna ve směru kladné osy *x*:**

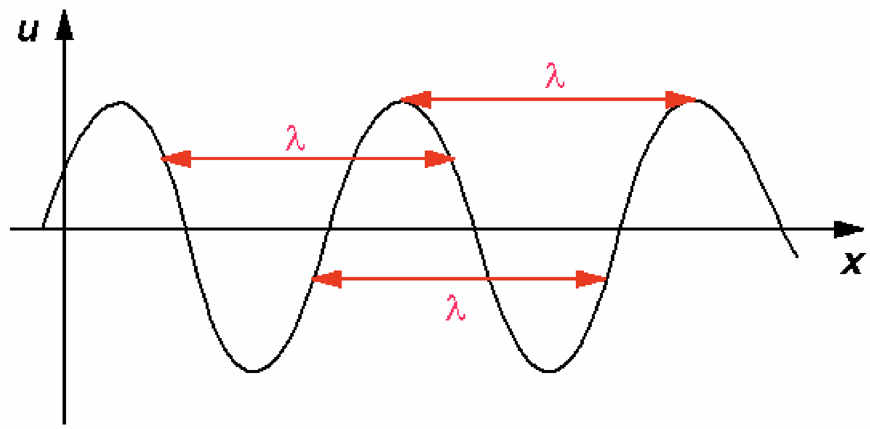
$$u(x,t) = A\sin\left[w\left(t - \frac{x}{c}\right) + a\right],$$

- **vlna ve směru záporné osy *x*:**

$$u(x,t) = A\sin\left[w\left(t + \frac{x}{c}\right) + a\right].$$

Pro harmonickou vlnu zavádíme vlnovou délku l.
Definice: Vlnová délka je vzdálenost, kterou urazí (rychlostí *c*) vlna za jednu periodu *T* kmitů (zdroje).

$$l = cT.$$



<u>Interference vlnění</u>

Je to skládání harmonických vln <u>stejné frekvence</u> w (jde tedy o speciální případ principu superpozice).

- **Výsledná vlna je také harmonická, tj. všechny body prostředí kmitají harmonicky s frekvencí w a obecně různými fázemi,**
- **Amplituda kmitů je v různých místech prostoru různá.**

A) <u>Interference dvou harmonických vln (podélných či příčných polarizovaných v jedné rovině) s frekvencí w, které se šíří s rychlostí $\vec{c}$ ve stejném směru (se stejnou orientací):</u>

$$u_1 = A_1 \sin w\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad u_2 = A_2 \sin\left[w\left(t - \frac{x}{c}\right) + j\right].$$

Interferencí těchto vln vznikne opět postupná harmonická vlna

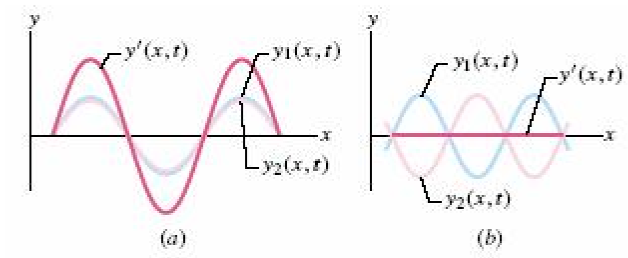
$$u = A \sin\left[w\left(t - \frac{x}{c}\right) + a\right],$$

kde

$$a = arctg\left(\frac{A_2 \sin j}{A_1 + A_2 \cos j}\right),$$

$$A = \sqrt{A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2A_1A_2 \cos j}\ .$$

Je-li $\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ vlny jsou ve fázi (maxima a minima jsou nad sebou) a $A = A_1 + A_2$.
Je-li $\varphi = \pm \pi, \pm 3\pi, \ldots$ vlny jsou vzájemně posunuty o $\lambda / 2$ a $A = |A_1 - A_2|$. Je-li v tomto případě $A_1 = A_2$, je $A = 0$ - jde o tzv. destruktivní interferenci.



B) <u>Interference dvou harmonických vln (podélných či příčných polarizovaných v jedné rovině) s frekvencí ω, které se šíří s rychlostí $\vec{c}$ a $-\vec{c}$ ve stejném směru (šíří se proti sobě):</u>
Pro jednoduchost předpokládejme, že $A_1 = A_2 = A$ a $\varphi = 0$.

$$u_1 = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad u_2 = A \sin \left[\omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right].$$

Výpočtem zjistíme, že

$$u = u_1 + u_2 = 2A \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \sin\left(2\pi \frac{t}{T} \right).$$

Výslednou vlnu u nazýváme vlnou <u>stojatou.</u>

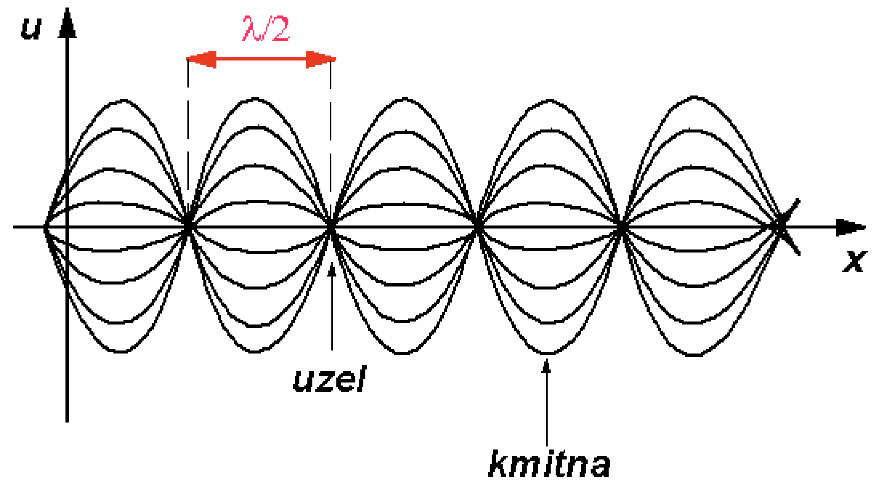
<u>Vlastnosti stojatého vlnění</u>
Vlnu u lze zapsat ve tvaru

$$u = A_v \sin\left(2\pi \frac{t}{T} \right),$$

kde

$$A_v = 2A \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right).$$

Tedy element prostředí, ve kterém existuje stojatá vlna, koná harmonické kmity o amplitudě $|A_v(x)|$.



Uzly - elementy v těchto bodech jsou trvale v klidu (v našem případě, kdy $A_1 = A_2 = A$).

$\left|A_v(x)\right|_{\min}$ **nastává v bodech** $x = \pm\frac{l}{4}, \pm\frac{3}{4}l, \pm\frac{5}{4}l, \mathbf{K}$ **- poloha uzlů.**

Poloha kmiten:

$\left|A_v(x)\right|_{\max}$ **nastává v bodech** $x = 0, \pm\frac{l}{2}, \pm l, \mathbf{K}$ **- poloha kmiten.**

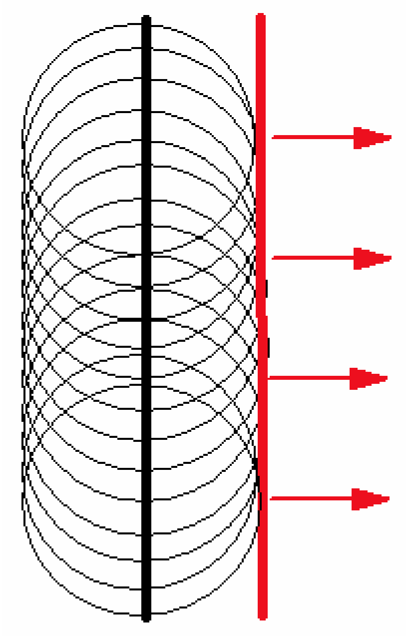
Všechny elementy mezi sousedními uzly kmitají se stejnou fází, elementy, mezi nimiž je jeden uzel, kmitají s opačnou fází.
Energie se trvale přesouvá z kmiten do sousedních uzlů a zpět, nepřenáší se jedním směrem jako u vlny postupné.

Huygensův-Fresnelův princip

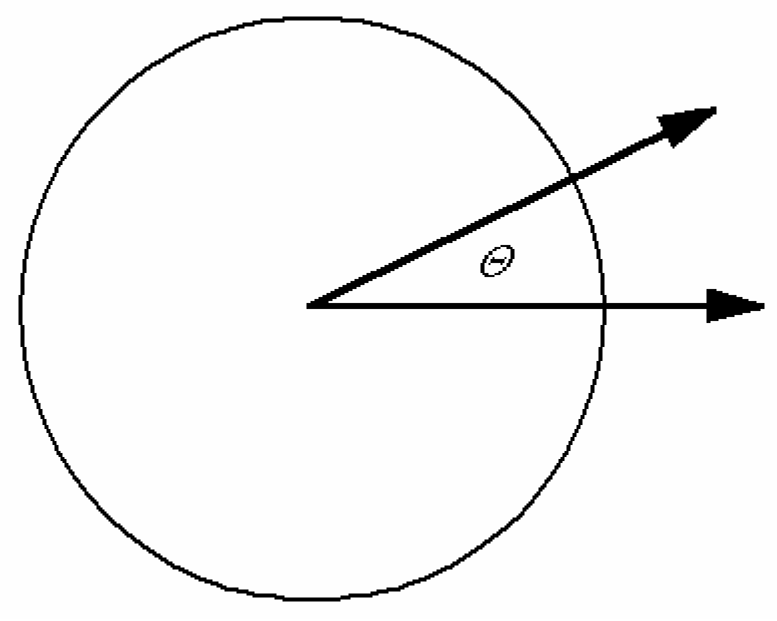
Každý element prostředí, v němž se šíří vlna, kmitá a působí přitom na sousední elementy – chová se jako sekundární zdroj, z něhož se šíří sekundární elementární vlny, které jsou v homogenním a izotropním prostředí kulové. Tyto sekundární vlny ze všech elementů prostředí se skládají a vytvářejí výslednou vlnu. Je-li $Č_1$ čelo vlny v okamžiku t_1, pak čelo vlny $Č_2$ v čase $t_2 = t_1 + Dt$ je dáno

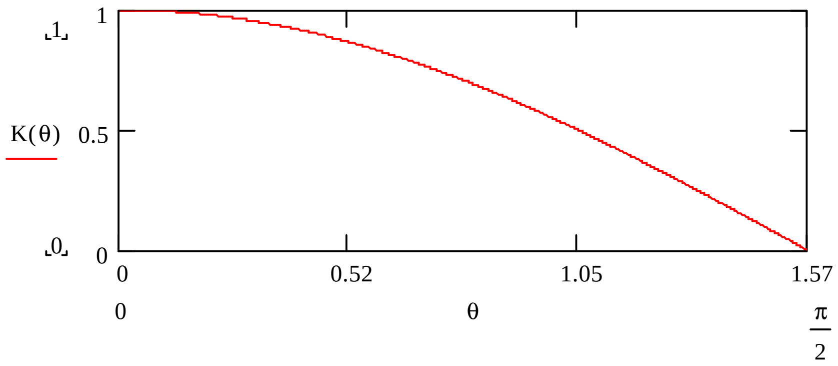
obálkou elementárních vln, vyšlých v čase t_1 z bodů čela $Č_1$ (Huygens).

Problém: Vlna by se šířila tam i zpět, což je v rozporu se skutečností.

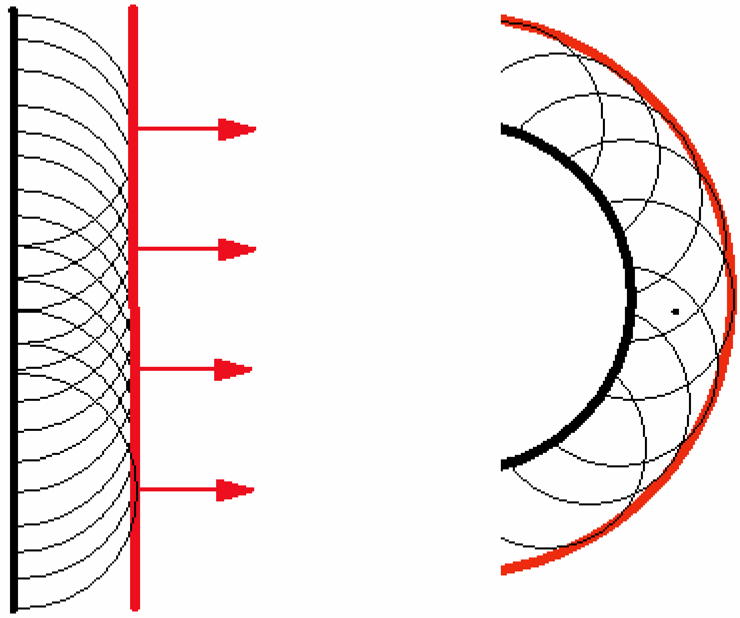


Fresnel proto zavedl tzv. faktor sklonu $K(q)$,který zeslabuje velikost výchylky v sekundární elementární vlně s rostoucí úhlovou odchylkou q od směru šíření výsledné vlny.



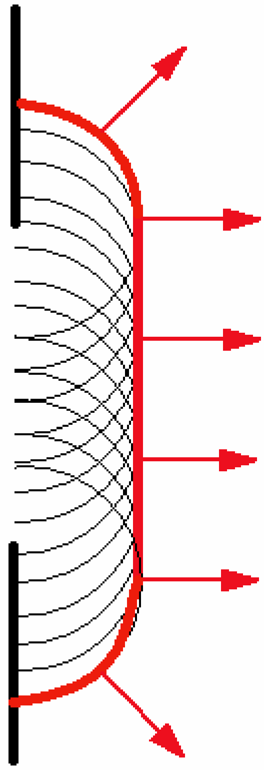


Tedy:

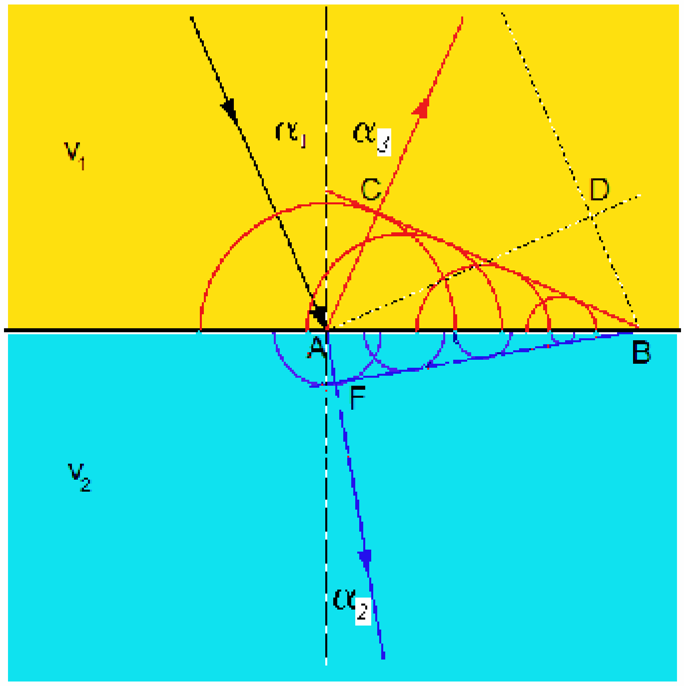


Z Huygensova–Fresnelova principu lze vysvětlit difrakci (ohyb) vlnění, tj. šíření vlnění za neprostupné překážky:

Vlnění se šíří za překážkou i do oblastí geometrického stínu.



Z Huygensova–Fresnelova principu lze vysvětlit odraz i lom vlnění na rovinném rozhraní dvou různých prostředí:



Vlnová rovnice

1D případ:

Obecná vlna postupující ve směru kladné osy x

$$u(x,t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Označme $t - \dfrac{x}{c} = p$ **a rovnici (1) zderivujme dvakrát podle** t **a dvakrát podle** x**:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial p}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial p}\left(-\frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Z (2) a (3) Þ vlnová rovnice

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

3D případ

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

neboli

$$\boxed{\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$